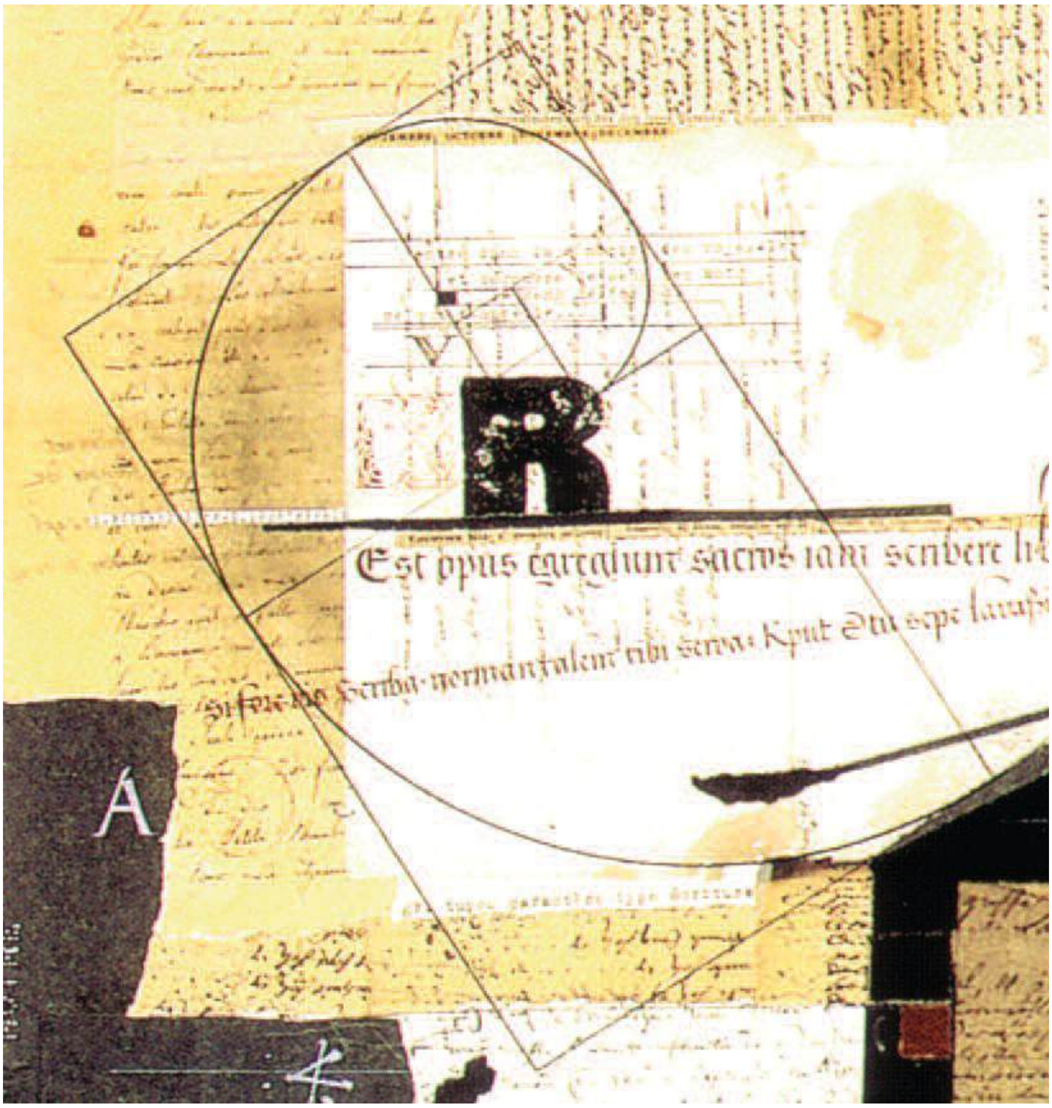
Livret pédagogique
Exposition Nombre d'Or



Réalisation
Comité International des Jeux Mathématiques
www.cijm.org

Comité International des Jeux Mathématiques
Association nationale de jeunesse et d'éducation populaire
Agréée Association nationale de l'Éducation Nationale

CIJM - Institut Henri Poincaré 11 rue Pierre et Marie Curie 75231 PARIS Cedex 05
N° SIRET : 433 879 343 00047 APE 927 C
Mail : cijm@cijm.org tél : 06 08 04 38 65

INTRODUCTION

Au cours des siècles, une littérature prolixe s'est attachée au nombre d'or. Ce nombre apparaît, aux yeux de certains, comme un principe d'harmonie universelle régissant le microcosme et le macrocosme, ou comme la clé d'une conception absolue de la beauté — conception qui a trouvé, à certaines époques, une application chez les peintres dans la " construction " de la surface picturale, un peu à la manière dont les architectes en ont usé parfois pour leurs plans et leurs élévations. En ce cas, l'expression section d'or sera employée pour traduire la notion euclidienne du partage géométrique en moyenne et extrême raison, tandis que le nombre d'or en représentera l'aspect spéculatif. C'est lui qui, dès l'Antiquité, se pare de significations mystiques, esthétiques, ésotériques, et dont nous retrouvons un écho dans le vocabulaire des théoriciens de la Renaissance : divine proportion, nombre d'or, section divine, section d'or.

Depuis les temps antiques, la section d'or apparaît comme la façon la plus logique de partager asymétriquement une droite selon les principes d'économie et d'harmonie. Euclide en donne la définition dans son Sixième Livre : " *Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison quand la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand est au plus petit.* " Si a et b sont ces deux parties, on doit avoir :
$(a + b) / a = a / b$. D'où : $a / b = 1/2 (\sqrt{5} + 1) = 1,618...$

Le nombre d'or, quotient d'un rapport, est donc égal à $1/2 (\sqrt{5} + 1)$ ou 1,618...

On peut remarquer que ce nombre, comme tous les irrationnels, peut être construit, c'est-à-dire géométriquement figuré avec un compas et une équerre.

Ce nombre se retrouve dans les figures géométriques dérivées du pentagone (en particulier le pentagramme) et du dodécagone. Amplifié dans l'espace, le pentagone régulier donne le dodécaèdre et l'icosaèdre, 2 des 5 corps platoniciens.

Quelles sont les origines du nombre d'or ? Elles semblent remonter aux pythagoriciens. Dès le VIe s. av. J.-C., cette confrérie, milieu d'intense culture mathématique, semble avoir attiré les esprits curieux de science et les mystiques. En fait, nos connaissances concernant cette secte se ressentent de la règle du secret qui accompagnait une longue initiation de cinq ans. D'après Lucien, le pentagramme, symbole du nombre d'or, aurait été le signe de ralliement des initiés. «Tout est arrangé d'après le nombre ", tel aurait été le fondement de leur philosophie, qui peut-être remonterait à l'ancienne Égypte. Cependant, que savons-nous de tout cela? Si Pythagore a donné son nom à une doctrine, il n'a lui-même laissé aucun écrit, et pourtant au cours des siècles, les écrivains seront intarissables sur son compte en donnant une envergure considérable à une pensée déjà si riche par elle-même. L'expression " le Maître l'a dit " avait une valeur absolue et suffisante pour ses disciples et les adeptes de sa doctrine jusqu'au Moyen Âge.

Aussi, dès son origine, le nombre d'or revêtira-t-il un caractère mystique, esthétique, ésotérique, que nous retrouverons tout au long de son histoire.

De cette doctrine, Platon, qui semble avoir eu des rapports intéressants avec les milieux pythagoriciens, paraît nous avoir donné un reflet. Pour lui, le nombre est facteur d'ordre, de mesure, de beauté, que seul le philosophe nourri de mathématiques sait apercevoir. Le Timée nous livre ses conceptions sur l'harmonie et la proportion, en particulier sur la " médiété " géométrique, le lien le plus fort qui puisse unir trois termes :

" Mais que deux termes forment seuls une belle composition, cela n'est pas possible sans *un troisième [...], il arrive ainsi nécessairement que tous les termes aient la même fonction, que tous jouent les uns par rapport aux autres le même rôle et dans ce cas tous forment une unité parfaite* " (le Timée, 31 c-32 a). Nous retrouvons donc ici la définition de la proportion " *dorée* ". Un peu plus loin, pour expliquer sa cosmogonie, il reprend le dodécaèdre pythagoricien (12 pentagones), impossible à réaliser sans la section d'or et dont il fait le symbole de l'harmonie cosmique : " *Le Dieu s'en servit pour le Tout, quand il en eut dessiné l'arrangement final* " (le Timée, 55 c). Avec Platon, nous retrouvons l'aspect spéculatif, qui demeurera l'un des signes les plus typiques de l'usage pratique.

Quant au mathématicien Euclide, dans ses Éléments, il revient un siècle plus tard, à quatre reprises, sur le partage en moyenne et extrême raison (liv. II, prop. 11 ; liv. IV, prop. 10-14 ; liv. VI, prop. 30 ; liv. XIII). Ce livre et tout l'héritage mathématique grec seront sauvés par les Arabes. Des auteurs tels que Nicomaque de Gérasa (Ier s. apr. J.-C.) et Boèce (VIe s. apr. J.-C.) nous en donnent aussi un reflet. Durant le Moyen Âge, ce sont les confréries de bâtisseurs qui transmettent la géométrie ésotérique pythagoricienne.

Dès 1228, Léonard de Pise (Fibonacci), qui écrit le premier traité d'algèbre, découvre également une série additive dans laquelle 2 chiffres consécutifs forment un rapport qui tend vers le nombre d'or : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... Un siècle plus tard, Campanus de Novare est sans doute le premier artisan du retour à Euclide, qu'il traduit et commente d'après une version arabe. Son livre, achevé en 1354, est imprimé à Venise en 1482. Dans de nombreux passages, il considère le nombre d'or dans une optique mathématique. Plus tard, c'est à la lumière de ces commentaires et de l'étude de Platon que Luca Pacioli, moine bolonais, compose son traité *De divina proportione*, paru à Venise en 1509, et non sans rapport avec le Traité des corps réguliers de Piero della Francesca, comme on l'a remarqué. Pacioli avance diverses raisons pour nous expliquer le choix de son titre. Cette proportion, apparentée à Dieu, est divine : comme lui, elle ne peut être définie de façon certaine, puisque irrationnelle ; comme lui, elle est toujours présente de façon invisible ; comme lui, elle est une, unique, invariable. Pacioli cite le Timée et insiste sur la nécessité de cette proportion sainte qui unit les 5 corps platoniciens. Léonard de Vinci les représentera sur les planches de l'ouvrage.

La peinture est alors une satisfaction de l'esprit doublée d'un contentement de l'œil, " *cosa mentale* ", pour reprendre l'expression de Léonard, qui, comme tous les gens instruits de son époque, s'attache à la géométrie. Aussi conseille-t-il à ses lecteurs : " *Ne lise pas mes principes qui n'est pas mathématicien.*"

Albert Dürer, au cours de l'un de ses voyages à Venise, au début du XVIe s., se rendit à Bologne, où résidait Pacioli, pour se faire initier " *aux arcanes d'une perspective secrète* ". Il est également l'auteur d'un Traité des proportions. Mais si nous connaissons mal quels rapports existent entre l'usage de la proportion dorée et les spéculations sur les proportions du corps humain, nous constatons qu'elles se sont attachées au problème des rapports proportionnés du corps à partir d'éléments anatomiques essentiels. Les humanistes de la première Renaissance redécouvrent librement l'architecture grecque et romaine et la philosophie géométrique de Platon. Ils posent leurs problèmes en essayant de les situer dans le contexte de l'Antiquité, dont ils se prétendent les successeurs. L'emploi des mathématiques ennoblit la peinture en lui conférant un aspect plus spéculatif dans la mesure, surtout, où l'organisation d'un " dessin " d'ensemble est commun à tous les arts, techniquement et théoriquement.

" *Puis la nuit se fait de nouveau sur les porteurs de torche* ", affirme l'écrivain Ghyka, qui a étudié le nombre d'or au XX^{e} s. Mais cet oubli n'est qu'apparent. Il serait dû aux progrès des sciences exactes. Euclide fait d'ailleurs l'objet de nombreuses éditions françaises, dont peut-être bénéficie notamment Poussin. Mais que conclure sans les témoignages scripturaires, pratiquement inexistants ?

Les théoriciens du XIX^{e} s. retrouvent l'intérêt extra-mathématique de la section d'or. Ils considèrent celle-ci comme la loi fondamentale qui imprègne la nature et les arts, et rejoignent les courants scientiste, mystique et théosophique du Symbolisme de la seconde moitié du siècle, qui influenceront souvent les artistes. Ainsi, Seurat, qui se formera dans un climat scientiste, développe-t-il une œuvre où l'origine de toute sensation d'harmonie est due aux nombres. " *L'art, c'est l'harmonie. L'harmonie, c'est l'analogie des contraires, l'analogie des semblables* " (lettre à Maurice Baubourg, 1890). Les théoriciens de la Renaissance — Ficin, Pacioli, Palladio — sont à l'origine de ces propos. Dans les toiles de Seurat, les personnages seront placés en général sur la section dorée, et c'est en ces termes que Lhote analysera la Parade.

À partir de 1885, en opposition à ce courant, se crée le Symbolisme. L'influence de Moreau s'étend non seulement aux Nabis, mais aussi au groupe ésotérique des Rose-Croix, dont le chef, le sâr Peladan, traduit le Traité de la peinture de Léonard, livre qui influencera Jacques Villon. En 1890, l'ouvrage de Schuré les Grands Initiés connaît un succès considérable. La doctrine de Pythagore et particulièrement la science des nombres sacrés y sont exposées en une centaine de pages. À la même époque, une esthétique religieuse, à tendance pythagoricienne, fondée sur les mathématiques, le nombre, la géométrie, voit le jour à l'abbaye bénédictine de Beuron. Le père Didier Lenz révèle au novice Jan Verkade, ami de Gauguin et de Sérusier, le dessin du nombre, de l'équilibre et de l'ordre.

Sérusier s'enthousiasme pour cette esthétique, qui lui permet d'atteindre " *un art plus grand, plus sévère, et sacré* ". Il fait des compositions, des figures nues avec la règle, les équerres et le compas de proportion réglé sur le nombre d'or. Son enseignement à l'Académie Ranson contribue à répandre l'usage des " *saintes mesures* ". Aussi, Sérusier put-il se proclamer le père du Cubisme, dont la première exposition fut placée sous le signe de la Section d'or (oct. 1912). Cette exposition était la suite logique du groupe de Puteaux, qui réunissait chez les frères Duchamp, passionnés de mathématiques, des artistes tels que Gleizes, Metzinger, Léger, Picabia, La Fresnaye, Apollinaire. L'organisation de la toile était le principal sujet de discussion : " *L'idée s'est ancrée en nous qu'une toile devait être raisonnée avant d'être peinte* ", avoue Villon, qui représente le meilleur exemple de l'emploi de la section d'or, transfiguré par un chromatisme délicat et subtil.

André Lhote, par son enseignement et ses livres, contribue à faire connaître les lois auxquelles doit " *obéir l'œuvre d'art pour échapper au débraillé sentimental* ". Le Traité du paysage insiste sur la composition du tableau " *pour solliciter ou retenir le regard* ". La division de la surface selon le nombre d'or possède le plus de vertus. Il essaie d'atteindre le Beau idéal platonicien, et les règles vont l'y aider, pense-t-il.

L'ouvrage de Severini, paru en 1921, Du cubisme au classicisme, porte un sous-titre révélateur de l'état d'esprit de l'artiste : Esthétique du compas et du nombre. Severini estime indispensable la connaissance de la géométrie pour construire une toile et revient aux idées de la Renaissance : le but suprême de l'art est de reconstruire l'Univers selon les lois mêmes qui le régissent.

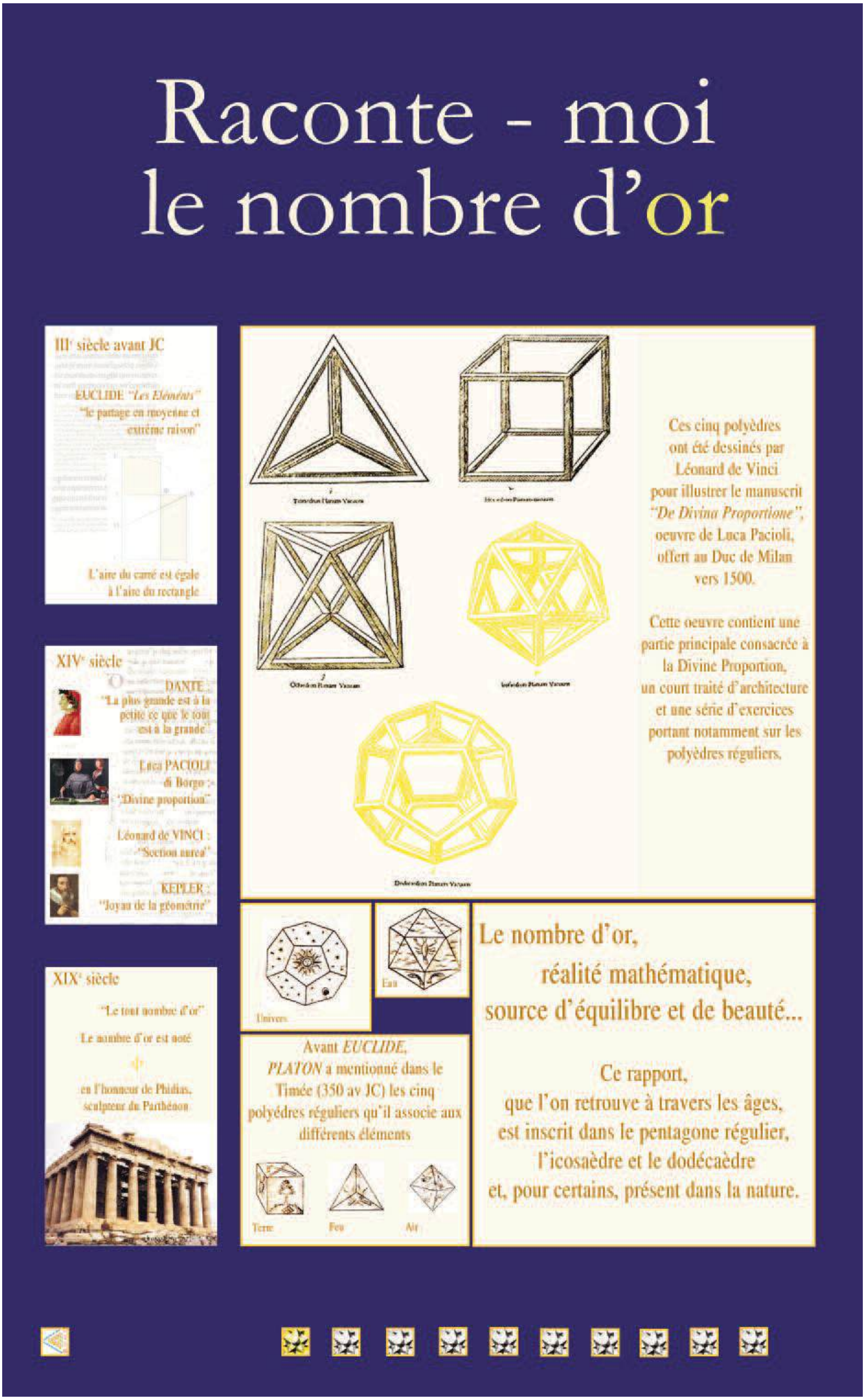
" *Or, comme l'homme procède de la fonction dans son corps, dans la dimension de ses membres...* ", Le Corbusier intègre la section d'or dans son fameux Modulor. Dans sa villa de Garches, il se sert de la diagonale comme élément de proportion. À l'heure actuelle, un peintre comme Agam emploie le nombre d'or en se servant d'un ordinateur pour définir les rapports entre les formes. Il obtient alors différentes combinaisons qui incorporent le temps (quatrième dimension) à l'œuvre.

Un problème se pose dès lors : ces artistes — qui se réfèrent toujours plus ou moins à Léonard, qui, lui, ne parle pas de la section d'or — ne sont-ils pas plutôt attachés à un mythe créateur, véritable garant de la composition ? L'usage du nombre d'or apparaît d'ailleurs chez certains peintres au moment où ils sont attirés par des personnalités typiques du quattrocento, tels Uccello et Piero della Francesca. Et bien des artistes n'ont-ils pas superposé leur propre point de vue à des exemples anciens, sous prétexte de renouer avec une famille spirituelle dont la définition historique n'est pas toujours bien donnée ? Et cette faveur dont jouit parfois au XXe s. le nombre d'or ne semble-t-elle pas due à l'abandon d'un espace perspectif ou tout au moins à la volonté de développer une organisation plus rigoureuse de la surface ?

Mais certains théoriciens, plaquant trop souvent des schémas mentaux sans partir d'une observation directe du document du passé, ont poussé très loin leur analyse et proposent des structures auxquelles les artistes n'avaient sans doute jamais pensé. Peut-on être bien assuré qu'il s'agisse de l'usage véritable de la section d'or dans telle composition de Raphaël, de Titien ou de Véronèse ? Sans doute, bien des schémas proposés nous offrent des coïncidences troublantes, pas toujours suffisantes. En revanche, bien des peintres présents se sont immédiatement emparés de ces études pour leur propre création.

Étape d'une culture, l'usage du nombre d'or semble avoir proposé fréquemment un mythe créateur à qui avait besoin de traduire une conception particulière de l'harmonie. Dans bien des cas aussi il a pu devenir une méthode d'école, une déformation pédagogique, mais plus facilement en peinture qu'en architecture. Aujourd'hui, des spéculations mathématiques comme celles d'un Xénakis semblent avoir ouvert, par rapport à des formes artistiques nouvelles, une quête différente, bien que toujours associée à l'idée d'une structure supérieure.

Extrait de l'Encyclopédie Larousse


Raconte - moi
le nombre d'or
III^e siècle avant JC
EUCLIDE "Les Eléments"
"le partage en moyenne et extrême raison"
L'aire du carré est égale à l'aire du rectangle
XIV^e siècle
DANTE :
"La plus grande est à la petite ce que le tout est à la grande"
Luca PACIOLI di Borgo :
"Divine proportion"
Léonard de VINCI :
"Section aurea"
KEPLER :
"Joyau de la géométrie"
XIX^e siècle
"Le tout nombre d'or"
Le nombre d'or est noté
φ
en l'honneur de Phidias, sculpteur du Parthénon
Ces cinq polyèdres ont été dessinés par Léonard de Vinci pour illustrer le manuscrit "De Divina Proportione", oeuvre de Luca Pacioli, offert au Duc de Milan vers 1500.
Cette oeuvre contient une partie principale consacrée à la Divine Proportion, un court traité d'architecture et une série d'exercices portant notamment sur les polyèdres réguliers.
Univers
Eau
Avant EUCLIDE, PLATON a mentionné dans le Timée (350 av JC) les cinq polyédres réguliers qu'il associe aux différents éléments
Terre
Feu
Air
Le nombre d'or,
réalité mathématique,
source d'équilibre et de beauté...
Ce rapport,
que l'on retrouve à travers les âges,
est inscrit dans le pentagone régulier,
l'icosaèdre et le dodécaèdre
et, pour certains, présent dans la nature.

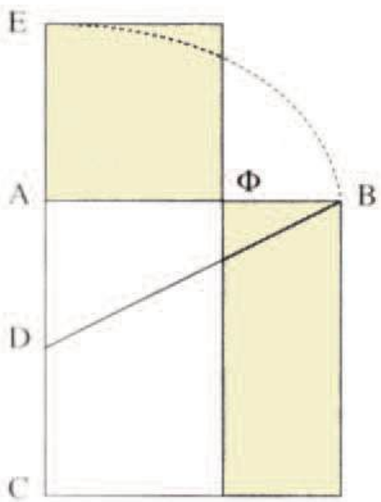
Panneau 1

Raconte-moi
le nombre d'Or

Platon dit à propos de ce nombre : « *De toutes les proportions, la plus belle est celle qui s'applique à elle même comme aux termes qu'elle relie, dans la plus complète unité* »

Euclide, dans ses Éléments, revient après Platon, à quatre reprises, sur le *partage en moyenne et extrême raison* (liv. II, prop. 11 ; liv. IV, prop. 10-14 ; liv. VI, prop. 30 ; liv. XIII) et en donne, dans son Sixième Livre, la définition suivante : " *Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison quand la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand est au plus petit.* " Aujourd'hui on écrit :
a et b sont les longueurs de ces deux segments, on doit avoir : $(a + b) / a = a / b$.

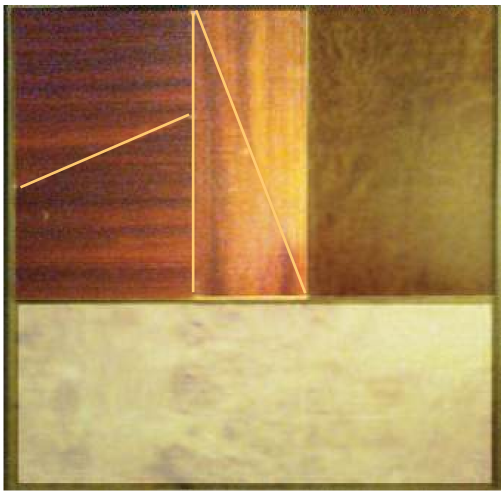
Euclide donne l' illustration géométrique suivante :



L'aire du carré de côté a est la même que celle du rectangle de longueur a+b et de largeur b

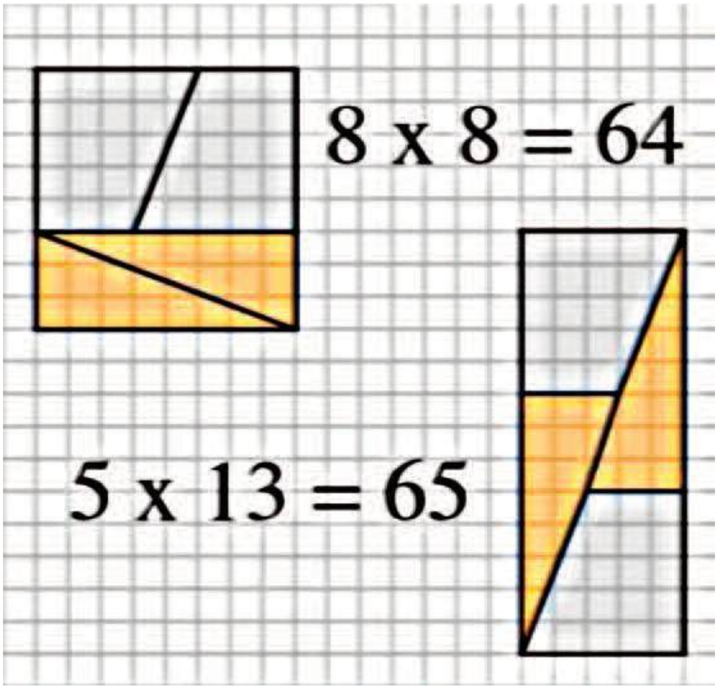
Aujourd'hui on dit que :
$a^2 = b (a + b)$ donne $a^2 - ba - b^2 = 0$; et en divisant par a^2 : $(a/b)^2 - a/b - 1 = 0$;
a/b est la solution positive de l'équation
$X^2 - X - 1 = 0$
D'où : $a / b = 1/2 (\sqrt{5} + 1)$
Le nombre d'or Φ est donc égal à $1/2 (\sqrt{5} + 1)$ ou 1,618... (une valeur approchée de Φ)

Un beau puzzle pour illustrer cette démonstration :



On peut montrer que si on découpe un carré en 4 pièces selon Φ et 1 on peut reconstituer exactement le rectangle

Et le puzzle impossible



En fait, on peut démontrer que, pour former le rectangle, les 4 pièces du puzzle ne s'alignent pas sur la diagonale du rectangle, laissant une petite surface égale à une unité d'aire.

Il semble qu'Euclide se soit particulièrement intéressé à ce partage *en moyenne et extrême raison* pour mettre en lumière certaines propriétés des cinq solides réguliers de l'espace.

Les cinq polyèdres réguliers de l'espace ou les 5 Solides de Platon

Pourquoi n'y en a – t – il que 5 ?

Les faces d'un ***polyèdre régulier*** doivent être des ***polygones réguliers***.

Le plus petit des polygones réguliers est **le triangle équilatéral**. Que peut-on faire en assemblant des triangles équilatéraux ?

- En assemblant trois triangles autour de chaque sommet, on peut construire le **tétraèdre** (4 faces équilatérales)

- En assemblant quatre triangles autour de chaque sommet, on peut construire l'**octaèdre** (8 faces équilatérales)

- En assemblant cinq triangles autour de chaque sommet, on peut construire l'**icosaèdre** (20 faces équilatérales)

Remarque : six triangles équilatéraux autour d'un point forment une surface plane

Ensuite vient le carré. Que peut-on faire en assemblant des carrés ?

- En assemblant trois carrés autour de chaque sommet, on peut construire le **cube** ou **hexaèdre** (6 faces carrées)

Remarque : 4 carrés autour d'un point forment une surface plane !

Puis vient le pentagone. Que peut-on faire en assemblant des pentagones réguliers ?

- En assemblant trois pentagones autour de chaque sommet, on peut construire le **dodécaèdre** (12 faces pentagonales)

Remarques : 4 pentagones réguliers autour d'un point se chevauchent …

Avec **les hexagones** on ne peut pas construire un polyèdre régulier car
3 hexagones autour d'un point forment une surface plane …

Donc 5 solides réguliers dans l'espace et que Cinq !!

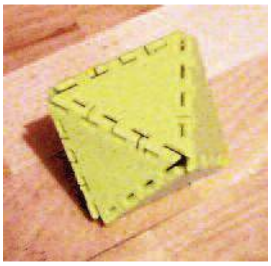
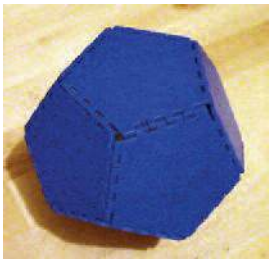
Le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

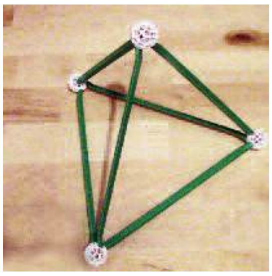
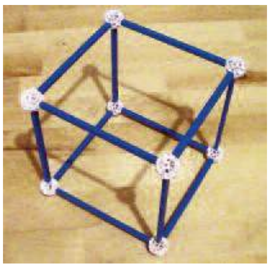
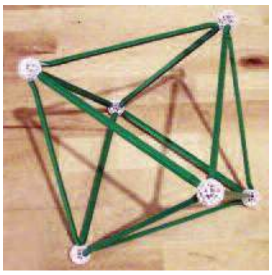
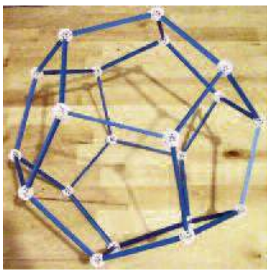
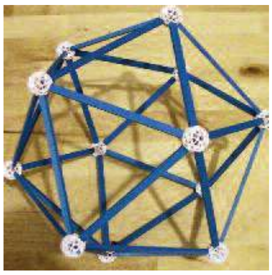
Construire les solides de Platon avec des lokons et compter sommets et faces
Etude des patrons de solides en développant les solides construits
Construction en origami

Construire les solides de Platon avec des Zome et compter sommets et arêtes

On peut mettre en évidence la formule d'Euler : $F + S = A + 2$



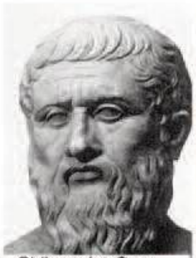



Les cinq Solides de Platon

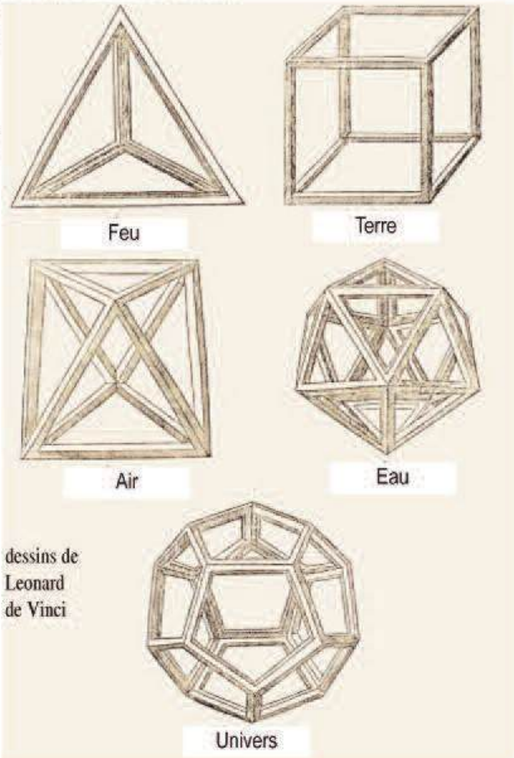
www.cijm.org

FICHE PEDAGOGIQUE



Platon - Philosophe Grec
427 av JC - 347 av JC

Il existe, dans l'espace, cinq polyèdres réguliers (toutes leurs arêtes et leurs angles sont égaux)



Leonard de Vinci
Artiste, ingénieur italien
1452 - 1519

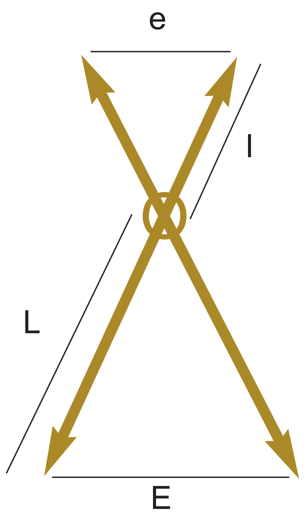
Leohnard Euler
Mathématicien suisse de génie
1707 - 1783

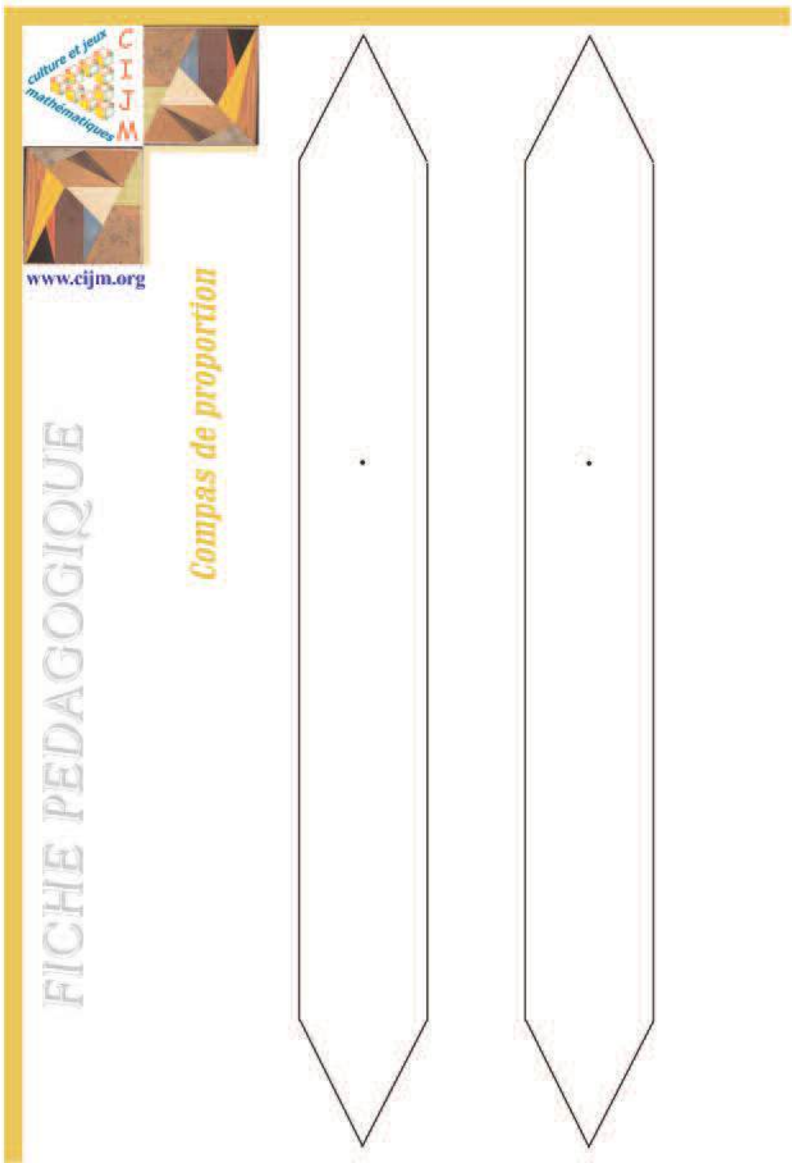
Observons les, nommons les, ...

Symbole	Nom	Nombre de faces **F**	Nombre de sommets **S**	Nombre d'arêtes **A**
Formule d'Euler				

Le compas de proportion

Un merveilleux instrument qui nous permet d'aller à la traque du nombre d'or
Dans un compas de proportion L / l est égal au nombre d'or
Avec Thalès on montre que quelque soit l'écartement E/ e = L / l





Le rectangle d'or

Une propriété du rectangle d'or

Quand un rectangle est d'or,

si on construit un carré
sur son plus grand côté
on obtient un rectangle d'or,

si on lui enlève un carré
construit sur son petit côté
on obtient un rectangle d'or...

Les dimensions du rectangle d'or

De dimensions G et P le rectangle d'or vérifie

$$\frac{G}{P} = \frac{G+P}{G}$$

$\frac{G}{P}$ est la solution positive de $X^2 = X + 1$

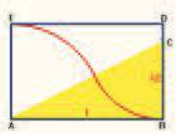
et vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

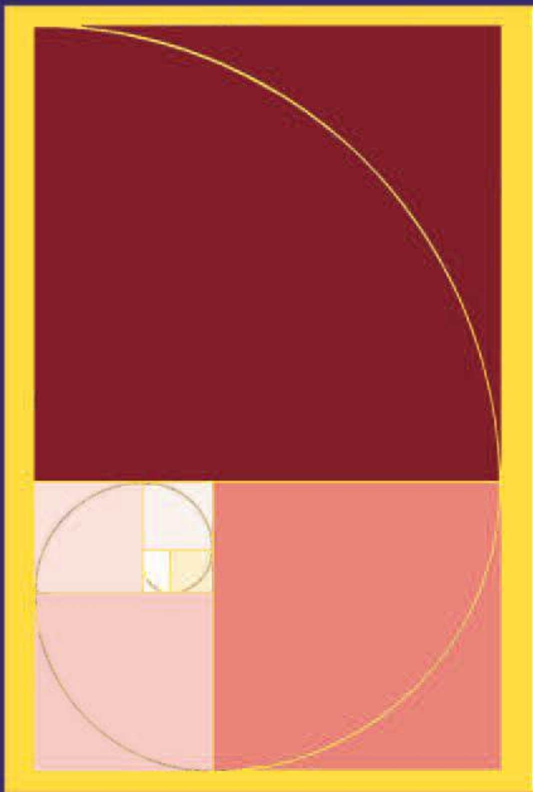
sa valeur approchée est 1.618

$$8/5 \leq \phi \leq 13/8$$

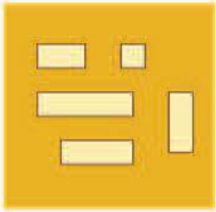
Construction avec " l'équerre d'or "

En deux coups de compas, l'un de centre C, l'autre de centre A on obtient le troisième sommet E du rectangle d'or ABDE.

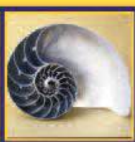




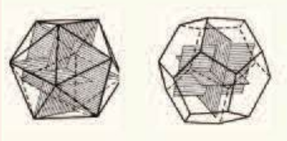
Dans cette suite de rectangles d'or, s'inscrit une belle spirale.

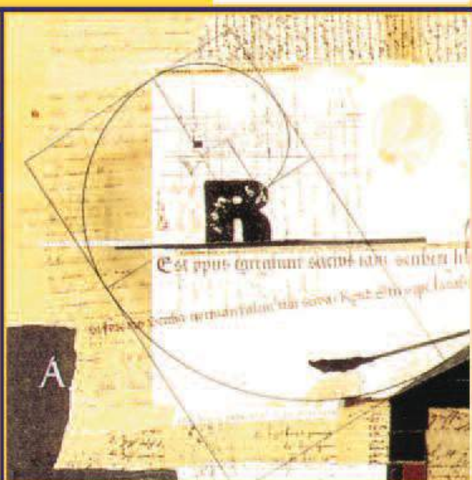


Ni trop long, ni trop court, le rectangle d'or est -il le plus harmonieux ?



Dans l'icosaèdre comme dans le dodécaèdre s'inscrivent 3 rectangles d'or perpendiculaires deux à deux dont le seul point commun est le centre de symétrie de ces polyèdres



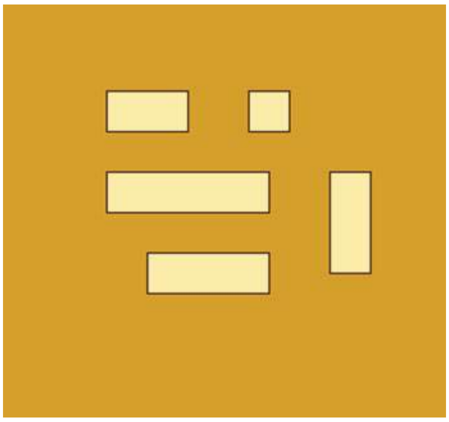


Panneau 2

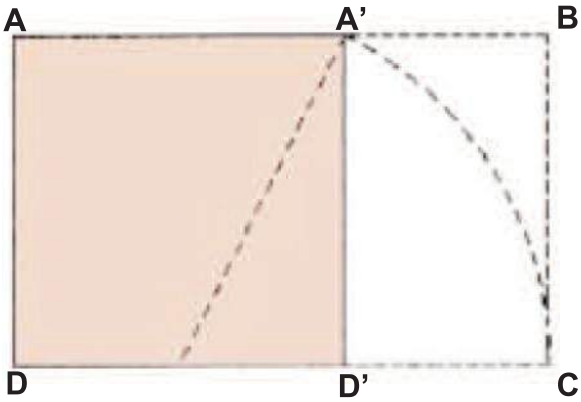
Voici plusieurs rectangles

Lequel est le rectangle d'or ?

Vérifiez avec le compas de proportion ou en mesurant.



A B C D est un **rectangle d'or** si seulement si A'B C D' (le rectangle obtenu en enlevant le carré A A' D' D du rectangle A B C D) est encore une rectangle d'or



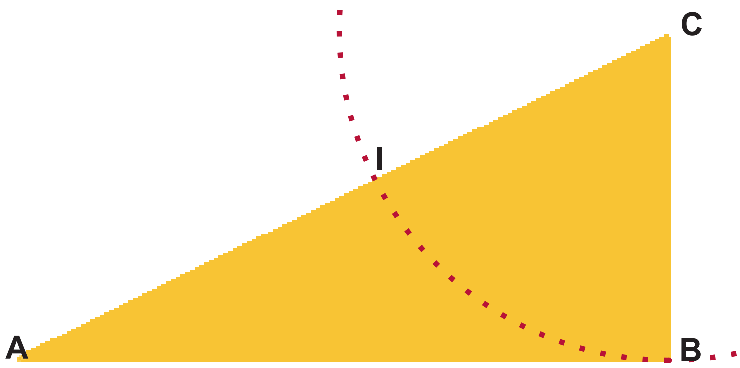
L / l = l / (L - l)

D'où $L^2 - Ll - l^2 = 0$; on divise par l^2 et on trouve $L^2/l^2 - L/l - 1 = 0$

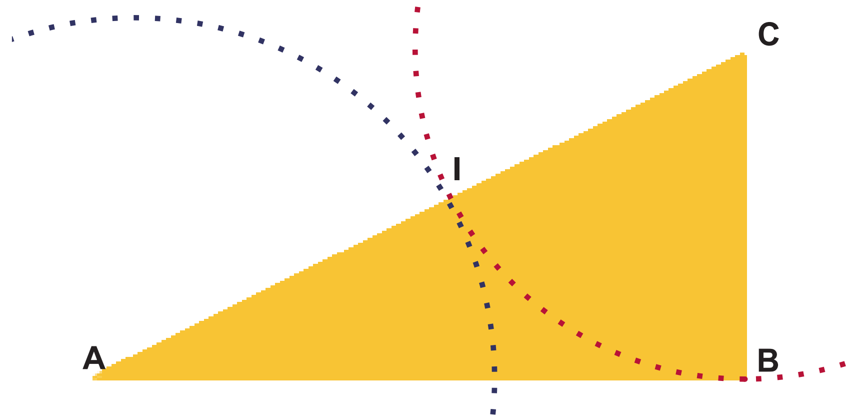
Il s'agit de l'équation qui permet de définir Φ (voir panneau 1 page 7)

Construction du rectangle d'or à la règle et au compas avec une équerre d'or ABC (BC = 1/2 AB)

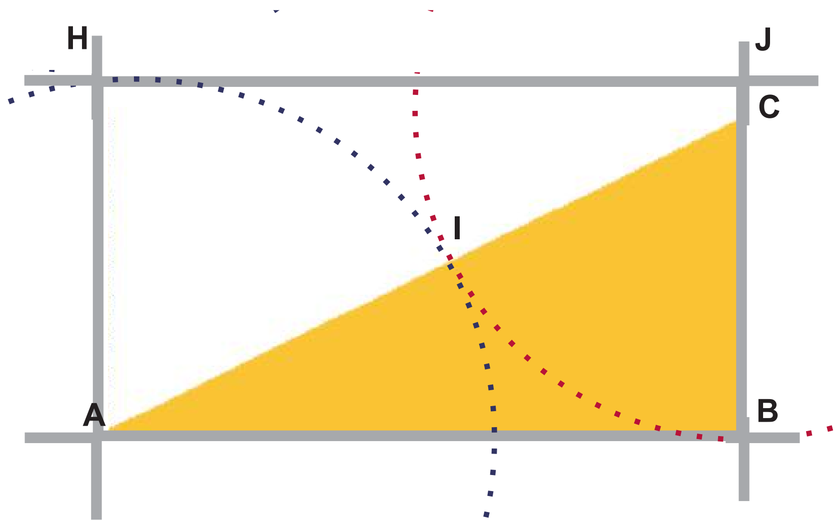
Tracer un cercle de centre C et de rayon C B qui coupe C A en I



Tracer un cercle de centre A et de rayon A I

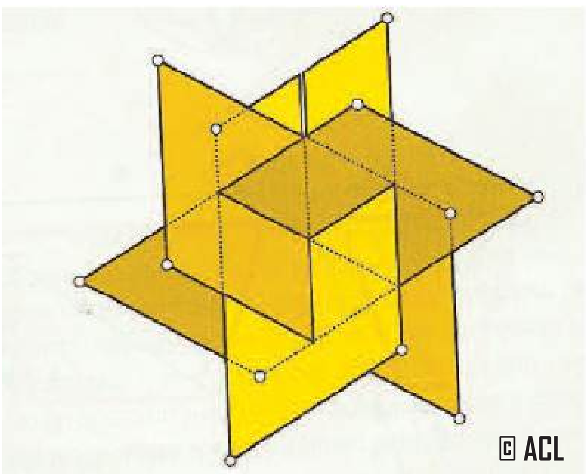


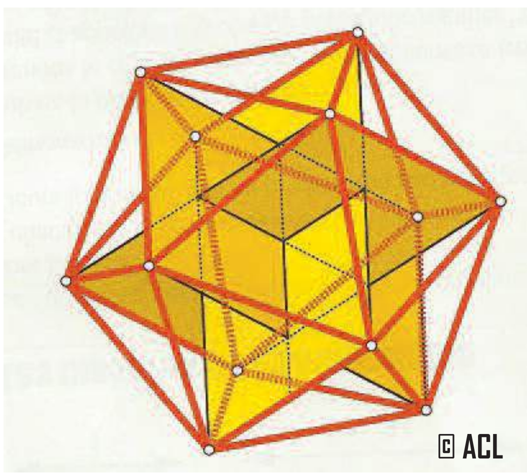
Tracer la verticale A H jusqu'au point d'intersection avec le cercle, prolonger B C et tracer l'horizontale H J.



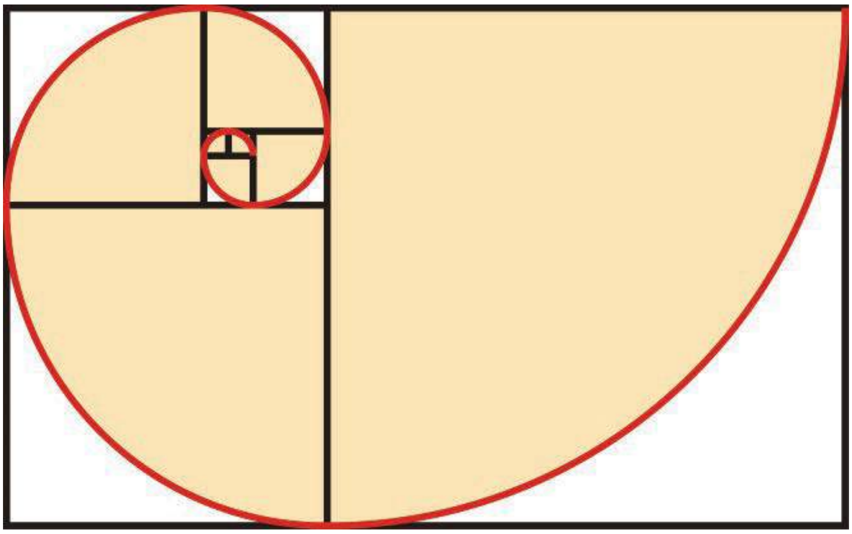
Rectangles d'or et Icosaèdre : le trièdre doré

On peut inscrire trois rectangles d'or emboités dans un icosaèdre





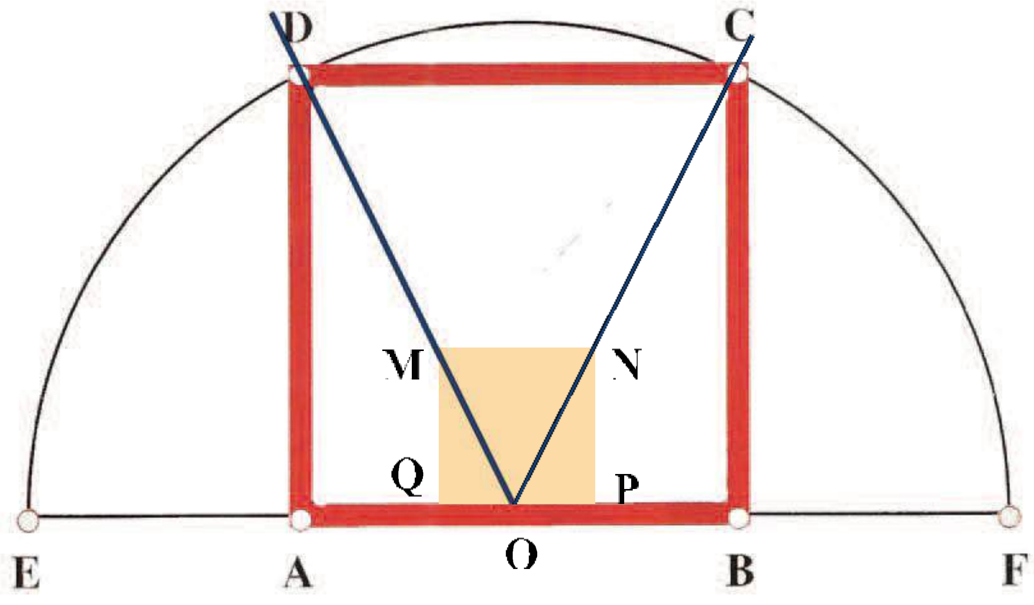
Une suite de rectangles d'or et une belle spirale inscrite



L'or encerclé

Comment inscrire un carré ABCD dans un demi-cercle ?

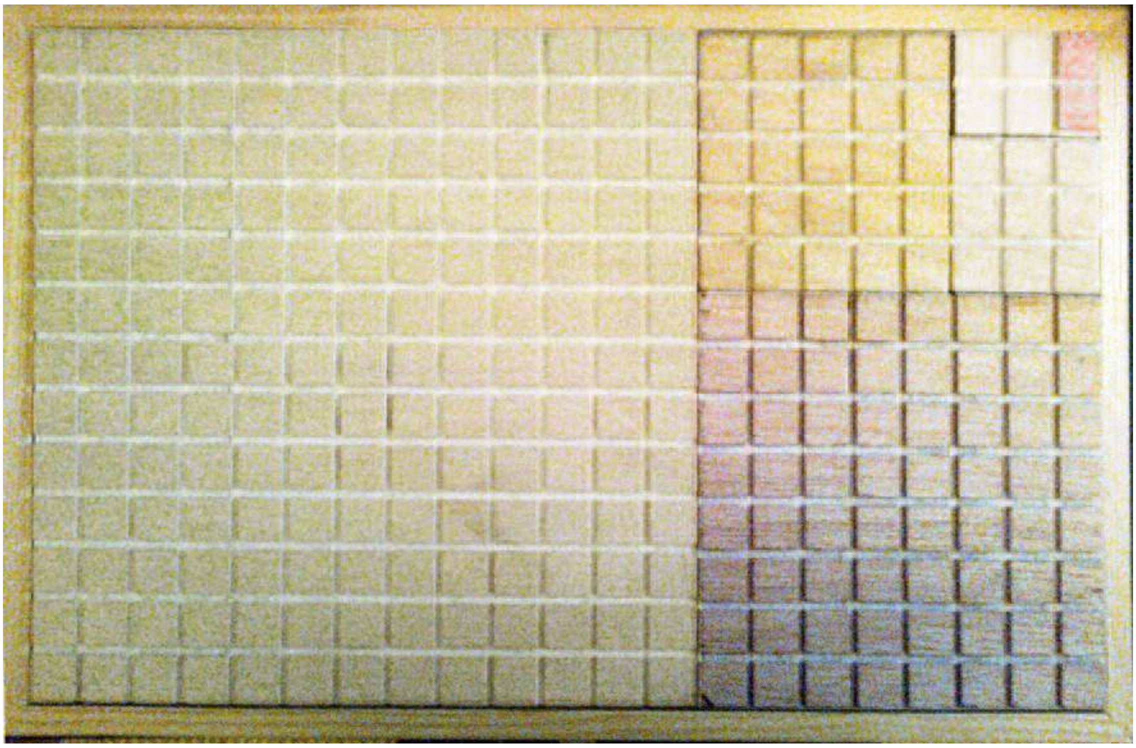
On construit d'abord le carré MNPQ avec O milieu de PQ.
ON coupe le cercle en C et OM coupe le cercle en D.
le carré ABCD est l'image du carré MNPQ dans une homothétie de centre O.
Il cache le nombre d'or.



On démontre que :

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AB}{BF} = \Phi \text{ ou } AF = \Phi AB = \Phi^2 BF.$$

Construction approchée d'un rectangle d'or à partir d'une suite de carrés



Les rectangles 2 x 1 , 3 x 2 , 5 x 3 , 8 x 5 , 13 x 8 …… approchent du rectangle d'or

Remarque : 13 / 8 = 1, 625 peu diffèrent de Φ

Une preuve sans mot par observation du puzzle

$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 8 \times 13$

Généralisons pour la suite (U_n) de Fibonnacci

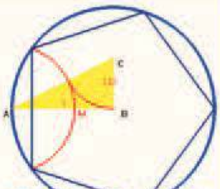
$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + …… + U_n^2 = U_n \times U_{n+1}$

Ce résultat se montre facilement par récurrence

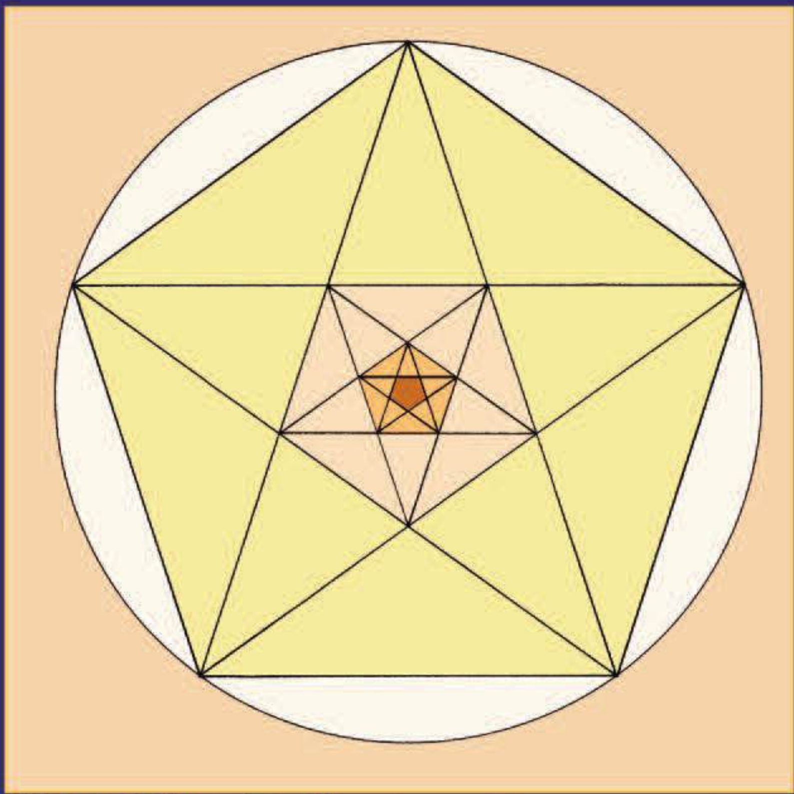
Le pentagone étoilé

Construction du pentagone régulier avec l'équerre d'or

En deux coups de compas on peut obtenir sur le cercle de centre B et de rayon AB, le côté du pentagone régulier qui s'y inscrit



M divise AB dans le rapport d'or

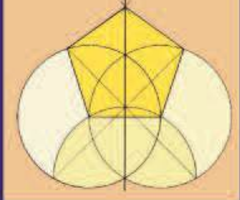


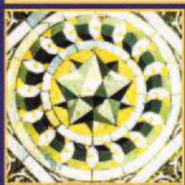
Le nombre d'or dans le pentagone étoilé

Dessin de Robert Vincent

L'élégance

de cette construction à la règle et au compas que l'on attribue à Albert Dürer (1471-1528) tient sans doute au fait qu'elle n'utilise que trois cercles tous de même rayon et trois droites





" Tout est nombre … "

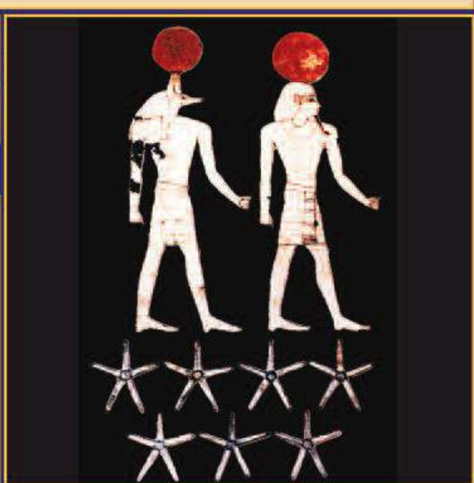
Pythagore

Pentagones,

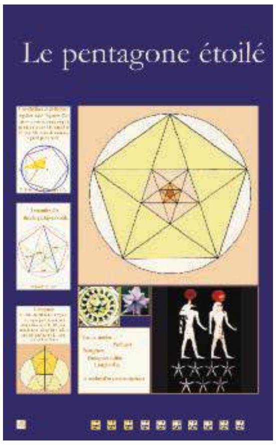
Pentagones étoilés,

Triangles d'or,

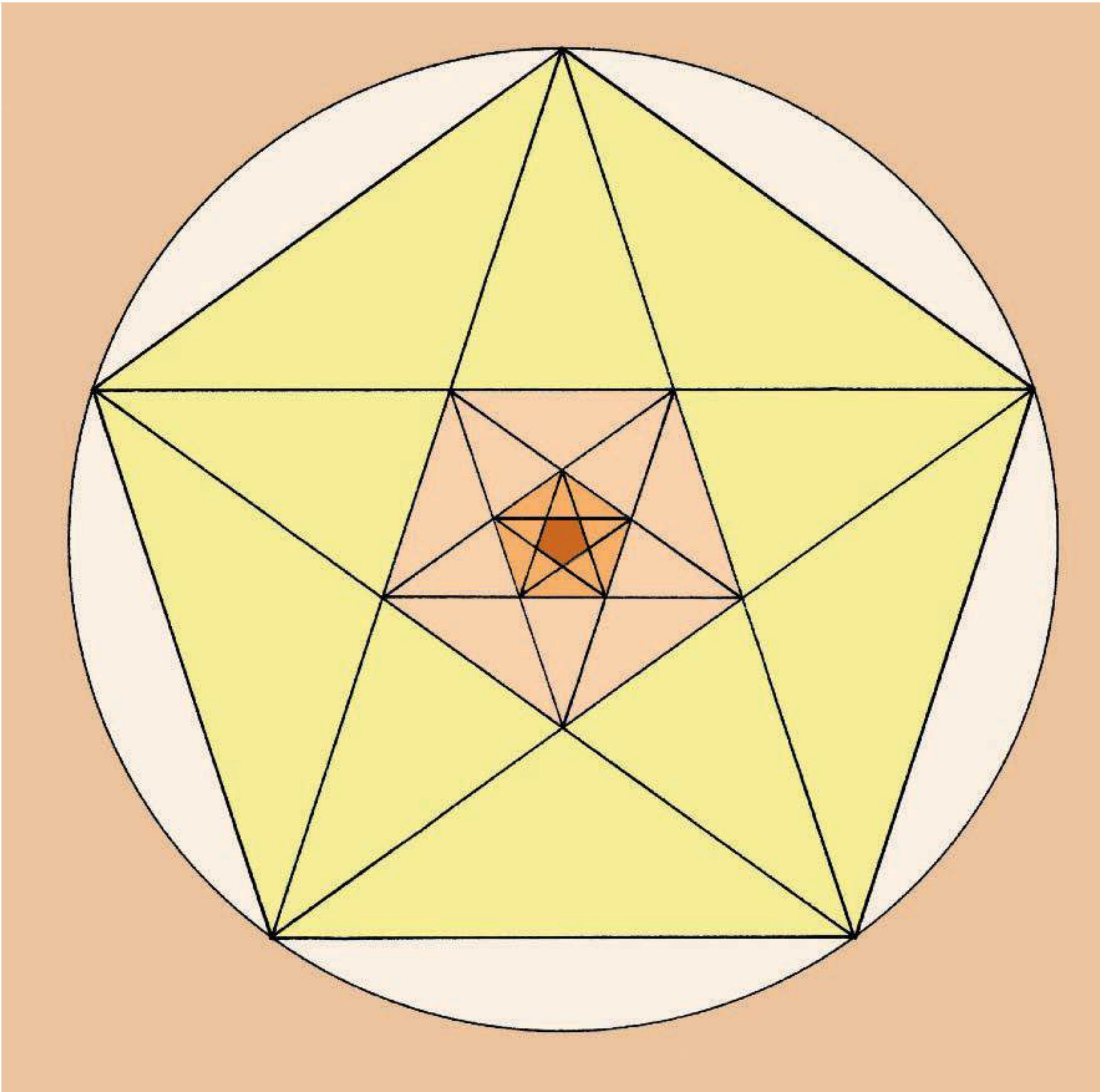
le nombre d'or y est omniprésent



Panneau 3

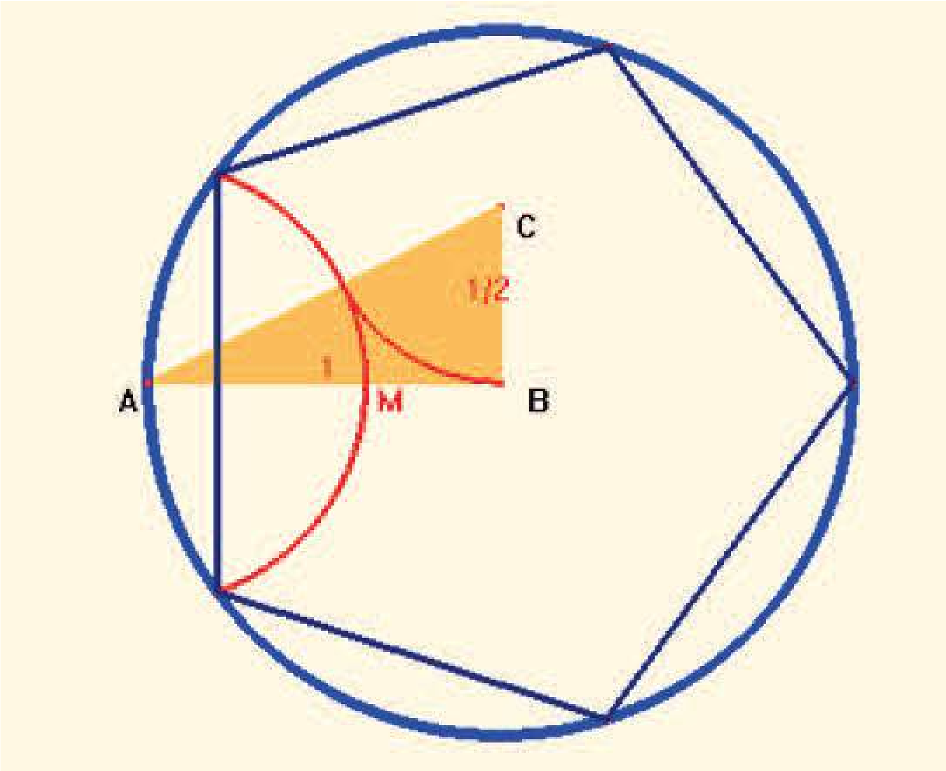


Avec le compas de proportion à la recherche du nombre d'or dans le pentagone étoilé



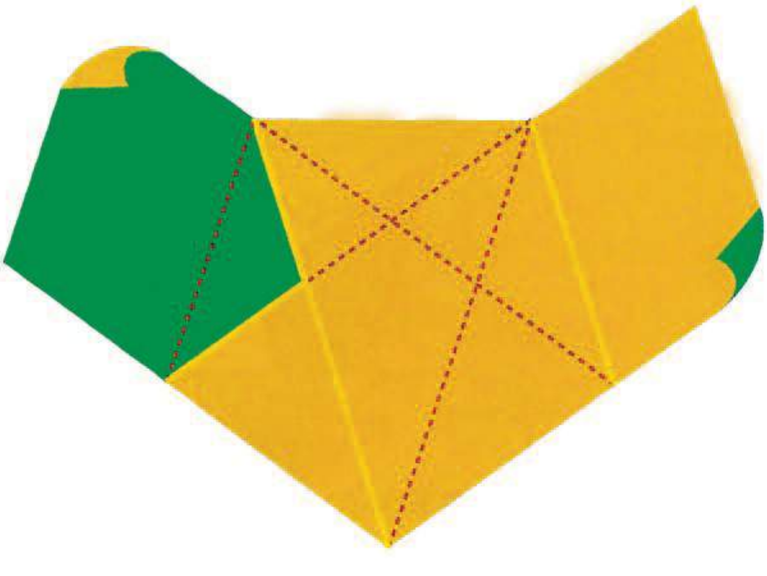
L'équerre d'or ABC : (BC = 1/2 AB)

Construction du pentagone régulier avec « l'équerre d'or »

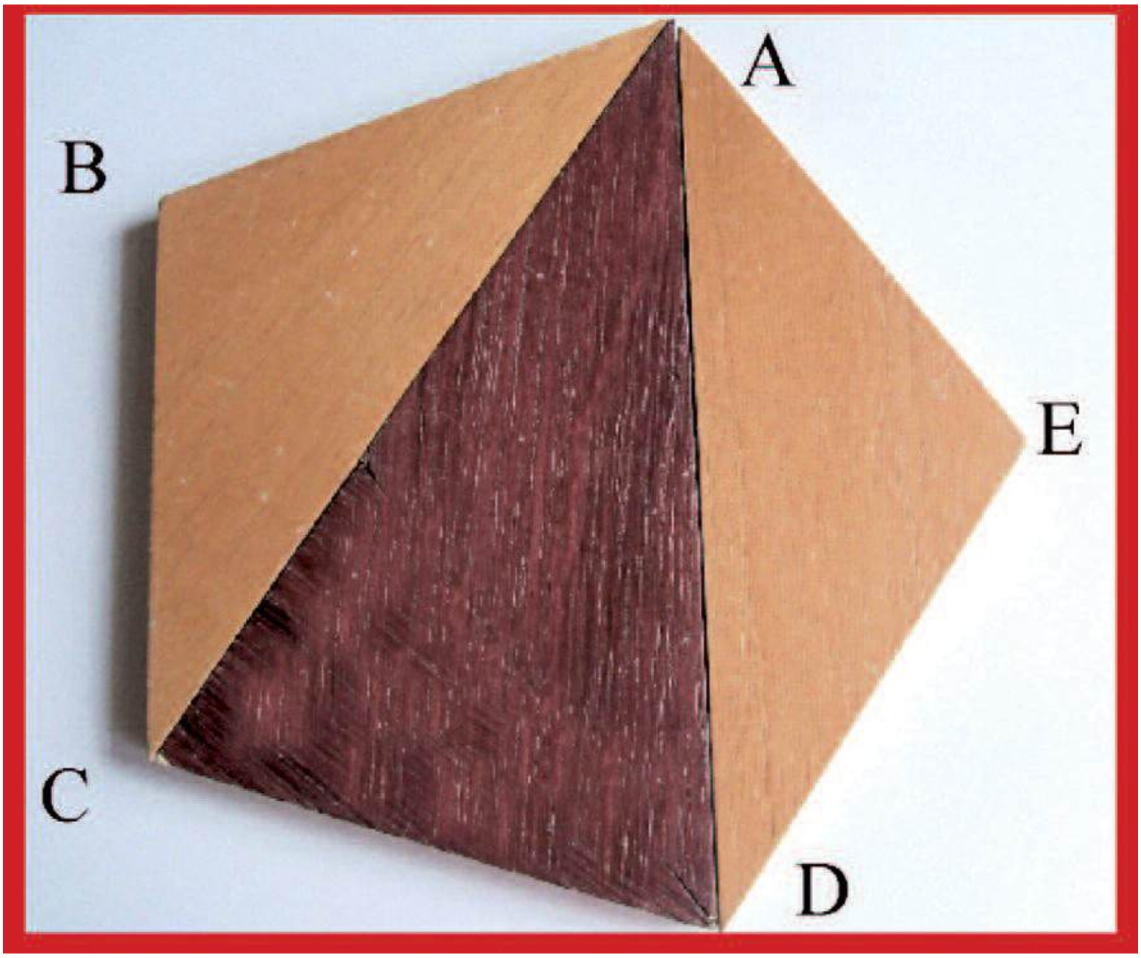


Le nœud doré

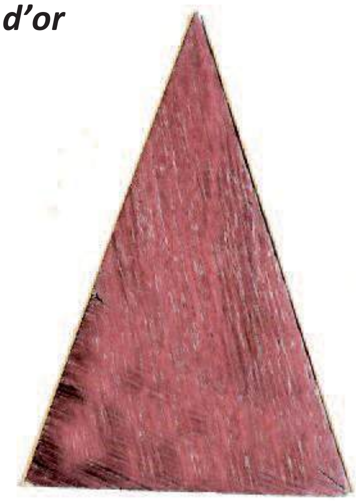
Plier une bande de papier pour faire un nœud bien plat , un pentagone apparait … Il n'est régulier que si le rapport entre la largeur de la bande de papier et le côté du pentagone est égal au sinus de72° . (Le nombre d'or, collection Que Sais-Je)

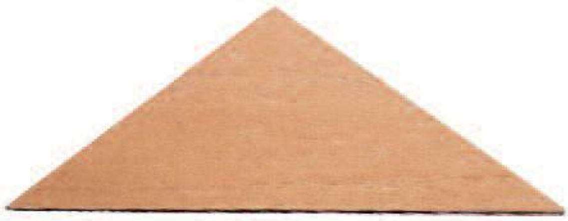


Découpage du pentagone en triangles d’or et d’argent



Triangle d’or





Triangle d’argent

Ces triangles ouvrent plusieurs pistes pour des activités ludiques , artistiques et riches mathématiquement parlant :

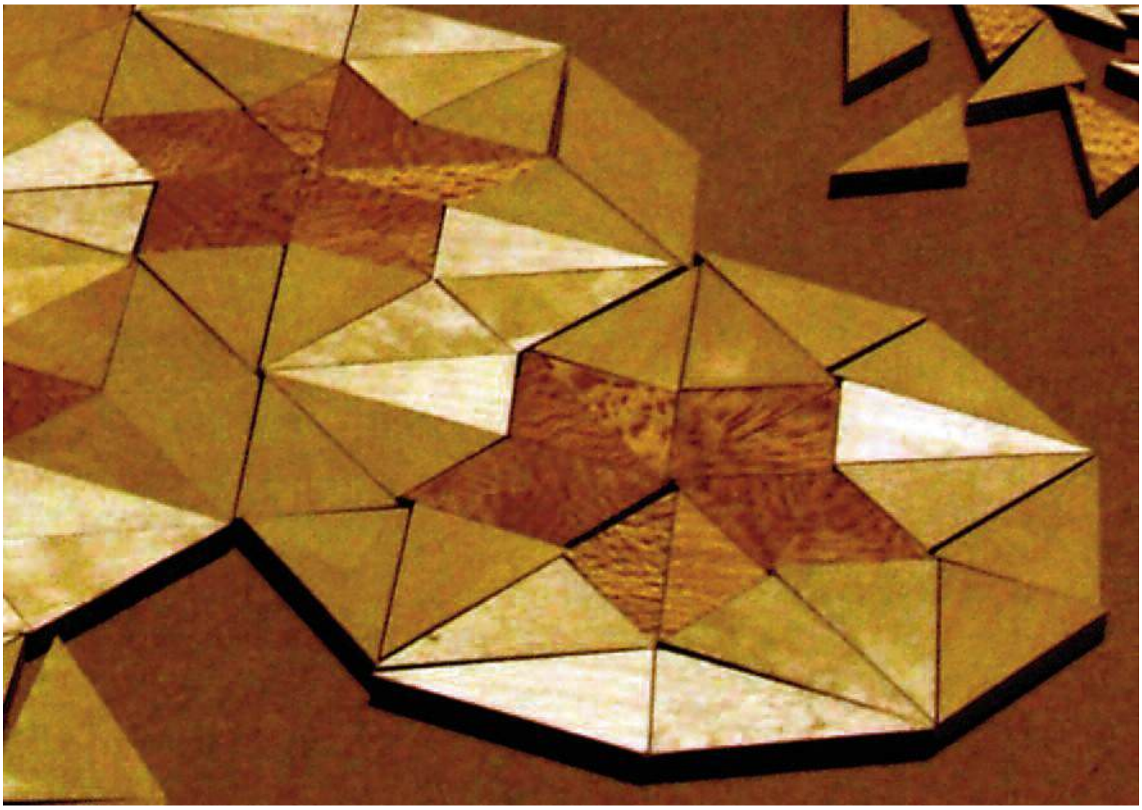
-De beaux pavages dont ceux du dodécagone

-Des calculs d’angles pour le pentagone régulier et pour les deux triangles isocèles d’or et d’argent

-Triangles isocèles semblables (rapport de similitude)

-Mise en lumière d’une suite de Fibonnaci

-Propriétés des quasi cristaux



Un dodécagone régulier avec triangles d'or et d'argent

Une suite de triangles d'or semblables

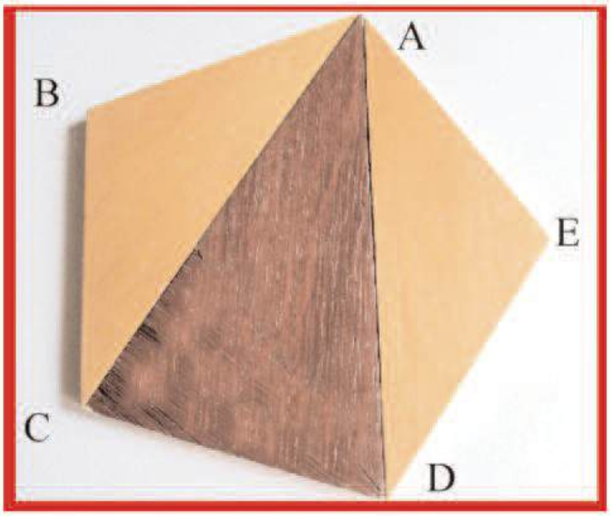
culture et jeux mathématiques CIJM

www.cijm.org

Le pentagone régulier et ses triangles d'or et d'argent

Le pentagone régulier ne permet pas de paver le plan, contrairement au carré ou au triangle équilatéral.

Découpons un pentagone régulier en un triangle d'or (Au) et deux triangles d'argent (Ag)



Vérifiez que ces triangles isocèles font apparaître le nombre d'or (environ 1,618) comme rapport des longueurs de leurs côtés

$AC/AB = AC/CD = AD/AE = \Phi \simeq 1,618$

FICHE PEDAGOGIQUE

Avec
deux triangles d'or
et
un triangle d'argent
on peut former un nouveau triangle d'or

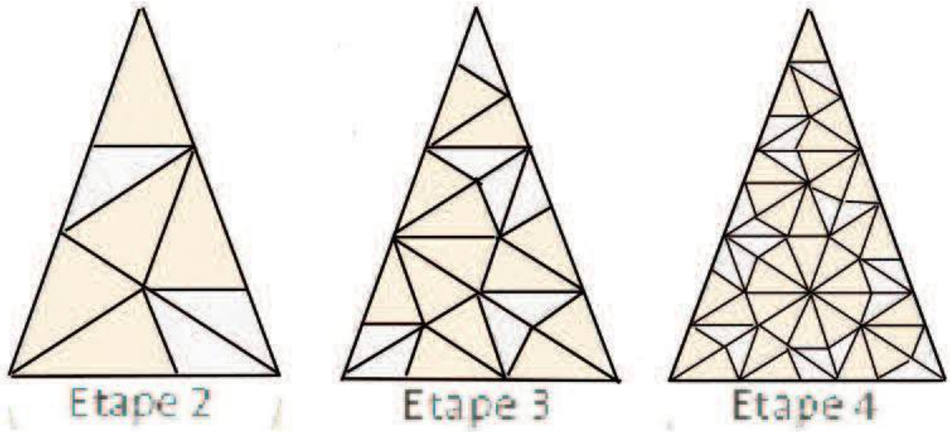
Avec
un triangle d'or
et
un triangle d'argent
on peut former un nouveau triangle d'argent

www.cijm.org

Le pentagone régulier
et ses triangles d'or et d'argent

FICHE PEDAGOGIQUE

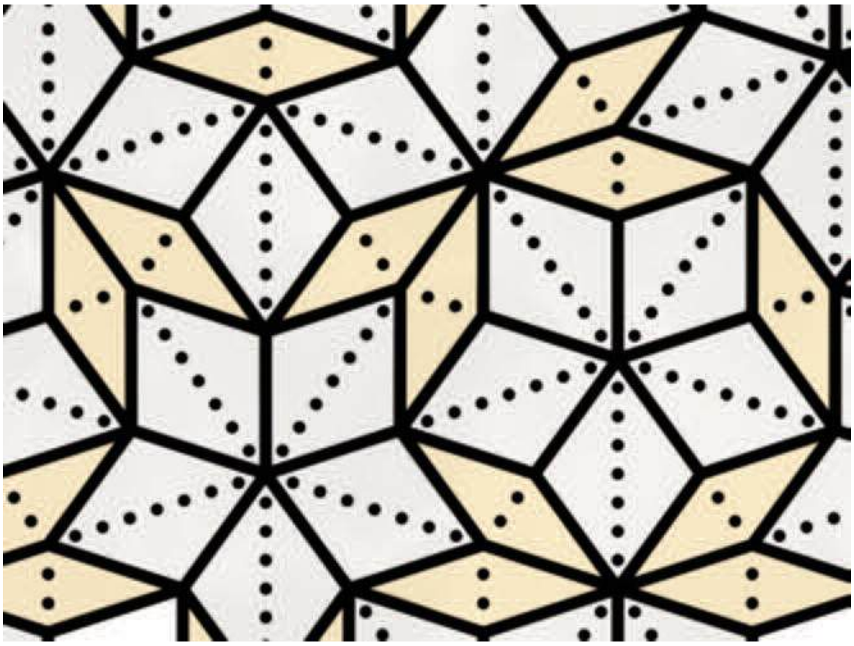
Ces trois triangles d'or ne sont pavés qu'avec des triangles d'or et d'argent



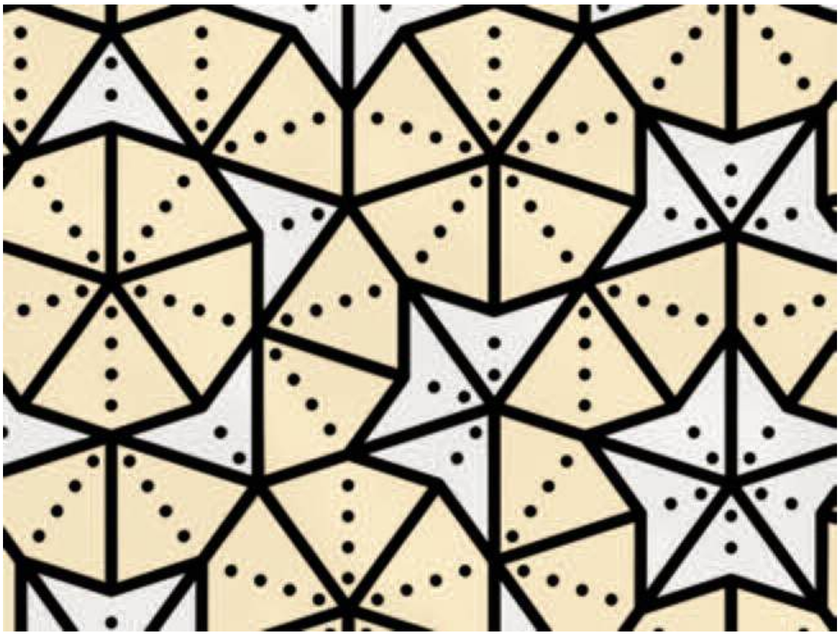
Dessin	Nombre de triangles d'or	Nombre de triangles d'argent
Etape 0		
Etape 1		
Etape 2		
Etape 3		
Etape 4		

Physicien et mathématicien anglais, *Roger Penrose* est diplômé de l'université de Cambridge en géométrie algébrique. Professeur à Oxford, il reçoit en 1998 le prix Wolf pour la physique.
Né en Angleterre, le 8 août 1931 à Colchester (Essex), Roger Penrose était le second d'une famille de 3 enfants. A l'instar de leurs parents, tous deux médecins, son frère Olivier, de deux ans son aîné, a lui aussi montré très jeune un grand intérêt pour les mathématiques. Quant à son frère cadet, Jonathan, il fut l'un des meilleurs joueurs d'échec de son époque.
Roger Penrose s'est intéressé aux pavages non périodiques du plan. Son intention n'était pas alors d'ouvrir un nouveau champ aux mathématiques ou à la physique **mais de créer un divertissement mathématique**. Et de fait ces pavages ne seraient restés qu'un joli divertissement si, entretemps, n'avaient été étudiés par des chercheurs des cristaux possédant une quasi-symétrie d'ordre 5 et pour lesquels les pavages de Penrose fournissaient un très bon modèle.
Comme quoi, Penrose avait raison quand il disait à propos de ses recherches :
« On ne sait jamais quand on perd son temps » !!

Pavage de Penrose avec deux types de losanges



Pavage de Penrose avec des fléchettes et des cerfs volants




Fibonacci
et le nombre d'
Biographie de Fibonacci
(1175-1240 environ)
Au milieu du Moyen Age naquit à Pise un certain Léonardo, connu sous le nom de Fibonacci (fils de Bonaccio). Il fut sans doute le plus grand mathématicien de son temps. C'était aussi un homme d'affaires international et un grand voyageur, érudit de sciences arabes, ce qui lui permit de réussir là où Gerbert d'Aurillac avait échoué, introduire les chiffres arabes en Occident.
Extrait du Liber Abaci
(traité de l'abaque) 1202
Léonard de Pise dit Fibonacci
Définition des suites de Fibonacci
Une suite u_n de nombres est dite " de Fibonacci " quand chacun de ses termes est la somme des deux termes qui le précèdent.
Quand on part de 1, 2, on obtient la suite : 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
Le rapport entre deux termes consécutifs d'une suite de Fibonacci tend vers le nombre d'or.
La suite géométrique de raison Φ et de premier terme 1 :
1, Φ, $Φ^2$, $Φ^3$, $Φ^4$, ...
est aussi une suite de Fibonacci
Problème posé par Fibonacci :
"Chaque mois un couple de lapins produit un autr
qui devient productif au bout de deux mois
Combien de couples de lapins ont été engendrés e
par un couple unique de lapins ?"
Nombre de naissances engendrées chaque mois
1er mois
2e mois
3e mois
4e mois
5e mois
6e mois
7e mois
8e mois
Leonardo Fibonacci
A Epidaure en Grèce,
on peut compter 21 et 34 gradins
Comptons
Le premier mois aucun couple
le deuxième mois 1 couple a
le troisième mois 2 couples ont
le quatrième mois 4 couples ont
le cinquième mois 7 couples ont
le sixième mois 12 couples ont
enfin le 12e mois
auront été
par l'unique couple

Panneau4

culture et jeux mathématiques CIJM

www.cijm.org

Fibonacci

un problème posé

FICHE PEDAGOGIQUE

" Quot paria cunuculorum in uno anno ex uno pario germinentur "

Combien de couples de lapins sont engendrés en une année par un seul couple ?

" Quelqu'un plaça un couple de lapins dans un lieu clos de murs de tous côtés pour savoir combien de bêtes seraient engendrées par ce couple en une seule année. La nature de ces animaux veut qu'un couple engendre un autre couple, chaque mois. Les petits sont, à leur tour, capables de se reproduire le second mois qui suit leur naissance ".

	Nombre de couple de naissances	Nombre de couple de lapins dans le champ
1er mois	0	1
2ème mois	1	2
3ème mois	1	3
4ème mois	1 + 1	5
5ème mois	1 + 1 + 1	8
6ème mois		
7ème mois		
8ème mois		
9ème mois		
10ème mois		
11ème mois		
12ème mois		

Une petite devinette

Pense à un premier nombre(pas trop grand), puis à un deuxième(un tout petit peu plus grand), le 3ème est la somme des deux premiers (donc le 1er et le 2ème), puis le 4ème est la somme des deux précédents (donc du 3ème et du 2ème), ainsi de suite … Dis moi le 7ème et je te dirai la somme des 10 premiers !!!!

Une autre façon de présenter les calculs

Chaque mois un couple de lapins produit un autre couple de lapins qui devient productif au bout de deux mois.

Au départ, dans ce champ, un seul couple de lapins qui ne produira que le deuxième mois.

On note U_n le nombre de couples de lapins engendrés le n^{eme} mois

V_n le nombre de couples de lapins présents dans le champ le n^{eme} mois

Le 1er mois	$U_1 = 0$	et	$V_1 = 1$
Le 2ème mois	$U_2 = 1$	et	$V_2 = 2$
Le 3ème mois	$U_3 = 1$	et	$V_3 = 3$
Le 4ème mois	$U_4 = 2$	et	$V_4 = 5$
Le 5ème mois	$U_5 = 3$	et	$V_5 = 8$
Le 6ème mois	$U_6 = 5$	et	$V_6 = 13$
Le 7ème mois	$U_7 = 8$	et	$V_7 = 21$
………..			
Le 12ème mois	$U_{12} = 89$	et	$V_{12} = 233$

Au bout de 12 mois, 232 couples de lapins ont bien été engendrés par l'unique couple présent au départ et il y a bien 233 couples de lapins présents dans le champ !

Bien d'autres situations font apparaitre le suite de Fibonacci

Nombre de façons F_n de monter un escalier de n marches quand on le monte soit marche par marche soit deux marches à la fois :

Avec une marche $F_1 = 1$ (1 façon)
Avec deux marches $F_2 = 2$ (1,1 ou 2 donc 2 façons)
Avec trois marches $F_3 = 3$ (1,2 ou 1,1,1 ou 2,1 donc 3 façons)
Avec quatre marches $F_4 = 5$ (1,1,2 ou 2,2 ou 1,2,1 ou 1,1,1,1 ou 2,1,1 donc 5 façons)

On peut montrer que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Nombre T_n de murets de hauteur 2 que l'on peut construire avec des briquettes de 1 X 1 X 2

Quelques propriétés des termes d'une suite de Fibonacci

On a vu $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + U_n^2 = U_n \times U_{n+1}$

On a aussi $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots + U_{10} = 11 \times U_7$
ce qui peut donner lieu à une devinette.

Nature
et nombre d'or

Observons le cœur d'un tournesol et l'intrigante disposition des fleurons.

Ils forment deux réseaux de spirales partant du centre dans les deux sens.

Avec un peu de patience on peut compter le nombre de spirales de chaque réseau.

On peut trouver
21 et 34 ou 34 et 55
et jusqu'à 144 et 233
pour le tournesol géant !!!

Observons la disposition relative des feuilles sur la tige d'une plante. Les points d'attache des feuilles les une au dessus des autres sont disposés sur une hélice s'enroulant autour de la tige.

Si on note le nombre de tours qu'il faut faire pour retrouver des feuilles situées à la verticale l'une de l'autre on retrouve des nombres de la suite de Fibonacci

Si on calcule l'angle entre deux feuilles successives on trouve approximativement $1/\Phi$ (ou $1/\Phi^2$) tour

Dame nature cherche à :

Optimiser les fonctions reproductrices

Capter le plus possible d'énergie lumineuse

La phyllotaxie

est l'étude de la disposition relative des parties semblables des plantes telles les feuilles, les bourgeons des arbres, les fleurons des fleurs composées, les écailles de cônes…

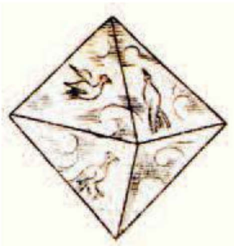
Pomme de pin dessinée par Le Corbusier

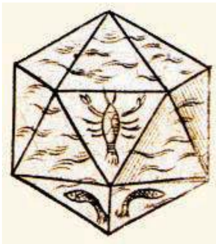
motif spiralé du tournesol

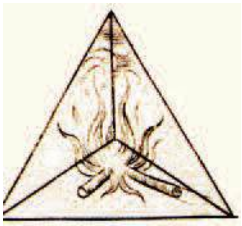
Panneau 5

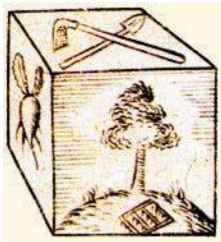
« Tout ce que la nature arrange dans l'univers paraît, dans ses parties comme dans son ensemble, être déterminé en accord avec le Nombre … »

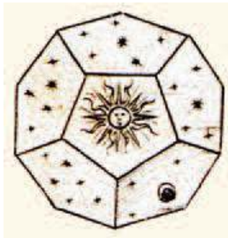
Pythagore à ses disciplines (rapporté par Nicomade de Gérase)

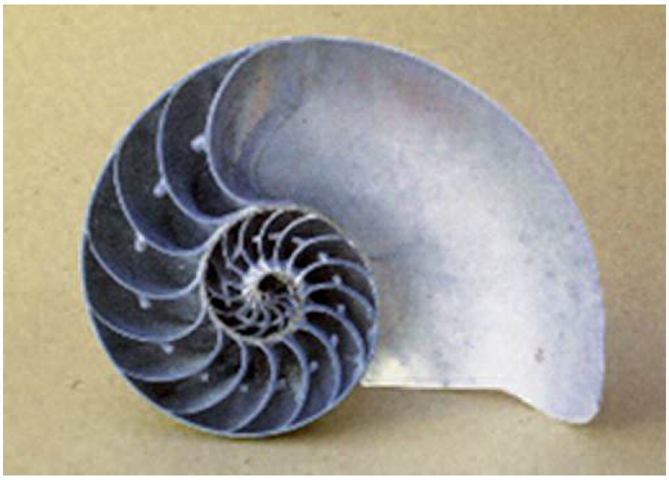












La phyllotaxie

Driss Boularas et Daniel Petit

Lorsqu'on observe une plante, on est frappé par la disposition régulière de ses pièces (feuilles, graines, écailles, capitules,...) en hélices ou lignes droites le long de son axe.

L'Ortie ou la Menthe présentent deux feuilles face à face (disposition opposée), certains Lis, trois ou plus (disposition verticillée); chez certains Cactus et Euphorbes, les pièces sont alignées verticalement (disposition orthostique). La plupart des plantes herbacées à tige grêle portent des feuilles disposées sur une ou deux hélices. Dans le cas d'organes à axe contracté (entre-noeud nul ou presque), comme les capitules de la famille des Compositae (Tournesol, Artichaut,...), ou des cônes (fruits des Conifères), on trouve 3, 5, 8, 13 hélices et même 55 pour les fruits portés par le capitule du tournesol. Presque tous ces nombres se retrouvent dans la suite de Fibonacci (voir l'encadré). Est-ce un hasard ?

La suite de Fibonacci et le nombre d'or

La suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par les valeurs initiales $u_0=u_1=1$ et la relation de récurrence $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ est appelée suite de Fibonacci et ses termes, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 21, … sont les nombres de Fibonacci. Si la suite (u_n) tend vers l'infini, celle des rapports $v_n=u_{n+1}/u_n$ (où $v_{n+1}=1+1/v_n$) tend vers un nombre *positif*, solution de l'équation algébrique *F-l-1=0*. Ce nombre, noté φ, en hommage au sculpteur grec Phidias (V^e s. av JC), est égal à

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ et est appelé nombre d'or.

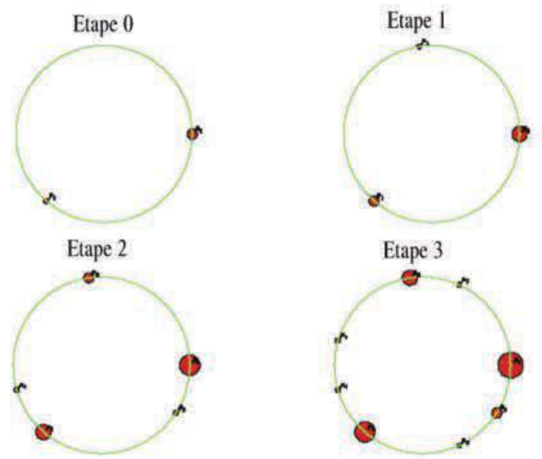
Plusieurs explications mathématiques relatives à la disposition des feuilles (phyllotaxie) sont possibles [1].

Ici, nous optons pour une modélisation mathématique fortement inspirée de l'article de F. Stoltz [2], basée sur le critère de W. Hofmeister et qui dit que *les primordia (embryons de bourgeons) apparaissent à intervalle régulier dans le plus grand espace disponible laissé par les primordia précédents.*

On représente les projections de tous les primordia d'une tige sur un même cercle dans l'ordre temporel d'apparition.

On note α la fraction de tour, appelée divergence, qui sépare deux primordia successifs dans le temps. Ce critère peut être simulé de la façon suivante :

A l'étape ***0***, nous avons deux primordia p_0 et p_1 qui forment deux arcs, un petit et un grand de valeurs respectives $2\alpha\pi$ et $2\pi - 2\alpha\pi$.



La phyllotaxie

A l'étape ***1***, apparaît un seul primordium p_3 sur l'unique grand arc. La valeur du petit arc est $2\pi - 4\alpha\pi$ et celle du grand arc, $2\alpha\pi$.

A l'étape **2,** nous aurons deux primordia p_4 et p_5 sur les deux grands arcs. Les valeurs respectives des petits et grands arcs sont $6\alpha\pi - 2\pi$ et $2\pi - 4\alpha\pi$.

On voit ainsi se profiler les nombres de Fibonacci. De façon générale, ne tenant compte que du fait qu'à l'étape n, il naît autant de primordia qu'il y a de grands arcs à l'étape n-1, le nombre de petits arcs, à l'étape n, noté u_n, vérifie la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Les valeurs des petits et grands arcs sont égales respectivement à :

$$a_n = (-1)^n(u_{n+1}\alpha - u_{n-1})$$

et

$$b_n = (-1)^n(u_{n-2} - u_n\alpha).$$

De l'inégalité $a_n \leq b_n$ on déduit la suite d'encadrements de α :

$$\frac{u_1}{u_3} \leq \frac{u_3}{u_5} \leq \frac{u_5}{u_7} \leq \cdots \leq \alpha \leq \cdots \leq \frac{u_4}{u_6} \leq \frac{u_2}{u_4} \leq \frac{u_0}{u_2}$$

Deux cas peuvent alors se produire. Dans le premier, on revient à la position initiale au bout d'un nombre fini d'étapes $u_n a_n = 1$. Grâce à la relation $u_{n+1} u_{n-2} - u_n u_{n-1} = (-1)^n$, on peut déduire la valeur de α : $\dfrac{u_{n-2}}{u_n}$

Dans le deuxième cas, la valeur de α est limite d'une suite : $\alpha = \dfrac{1}{\varphi^2}$

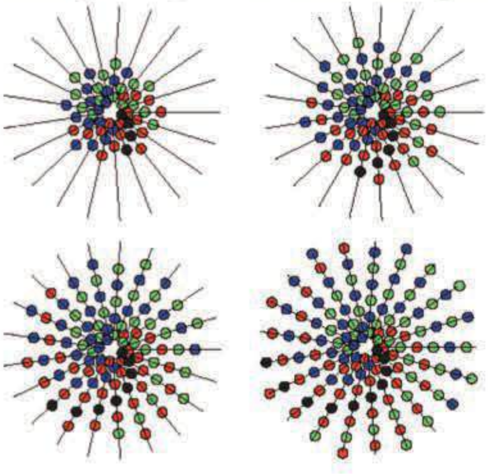
où **phi** est le **nombre d'or.**

Reprenons le calcul des hélices. Sur une pomme de sapin Douglas, on trouve parfois 3 hélices dextres et 5 sénestres, parfois 5 dextres et 3 sénestres. Pour savoir si ce végétal fonctionne avec 3 ou 5 hélices, il faut comparer la régularité des deux types d'enroulement, selon Loiseau et Deschatres [3]. Le système de physiologie régulée permettant l'apparition des primordia des différentes pièces fonctionne en produisant 5 hélices dextres ou sénestres selon les individus ou les branches d'un même individu. L'apparente coexistence de 3 hélices en sens inverse vient de la régularité globale du fonctionnement. Lors de la première brisure, le primordium peut se développer à deux endroits, mais une fois apparu, il détermine le sens d'enroulement des primordia suivants.

Passons à l'explication mathématique.

Mettons nous dans la situation où la divergence d'une plante est égale à

$d = \dfrac{u_n}{u_{n+2}}$ et partageons le cercle en u_{n+2} secteurs égaux. La divergence représente alors u_n fois la valeur d'un secteur. On note p et q le nombre de spirales



La phyllotaxie

dextres et senestres qu'on suppose, pour les premières et les secondes, également espacées. Il s'ensuit pour deux primordia quelconques mais consécutifs sur une même spirale, l'existence de deux entiers k et l tels que

$$pd = k - \frac{1}{u_{n+2}}$$

$$\text{et } qd = 1 + \frac{1}{u_{n+2}}.$$

Des deux égalités précédentes, on déduit deux équations aux inconnues p et q :

$$pu_n - ku_{n+2} = -1$$

et

$$qu_n - lu_{n+2} = +1.$$

Tenant compte de certaines relations vérifiées par la suite (u_n) et du fait que les nombres u_n et u_{n+2} sont premiers entre eux, les *plus petites* solutions de ces équations sont

$$p = u_k \quad \text{et} \quad q = u_{k+1},$$

ou

$$p = u_{k+1} \quad \text{et} \quad q = u_k$$

Nous remarquons donc que les nombres p et q, des spirales dextres et senestres, sont bien des termes consécutifs de la suite de Fibonacci et donc leur rapport est une valeur approchée du nombre d'or.

Bien que cette explication mathématique de la croissance des plantes s'applique à de nombreux cas et permet une modélisation rationelle, force est de reconnaître que Dame Nature a bien d'autres façons de s'épanouir.

Par exemple, dans les plantes qui ne suivent pas directement les termes de la suite de Fibonacci, on trouve certains cactus qui admettent 10 = 2 x 5 spirales dextres et 16 = 2 x 8 senestres.

Pour en savoir un (un peu) plus

Bibliographie

[1] R. V. Jean, {\it Croissance végétale et morphogénèse}, éditions Masson, 1983.

\bibitem{stoltz}

[2] F. Stoltz, {\it Quelques problèmes posés par la phyllotaxie}, Irem de Strasbourg, mai 1979.

[3] J.E. Loiseau, R. Deschatres. {\it Les phyllotaxies bijuguées}, Mémoire Société Botanique de France, 105-116, 1961.

Les outils du Maître d'Oeuvre

Son équerre

L'équerre de Hue Libergier porte les marques de quelques rectangles remarquables dont le rectangle d'or.

On la retrouve gravée sur les piliers de l'Abbatiale de Saint Benoît sur Loire

Son compas

Le compas, indispensable au Maître d'Oeuvre beaucoup plus attaché au report des proportions qu'aux nombres eux-mêmes

Sa canne

La canne de Maître d'Oeuvre portait un système de mesures variables suivant l'époque et la région.

Ces mesures font référence au corps humain : paume, palme, empan, pied et coudée.

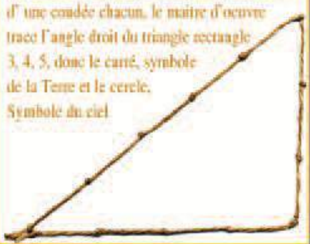
Hue Libergier, mort en 1263, est le Maître d'œuvre qui construisit l'église Saint-Nicaise à Reims.

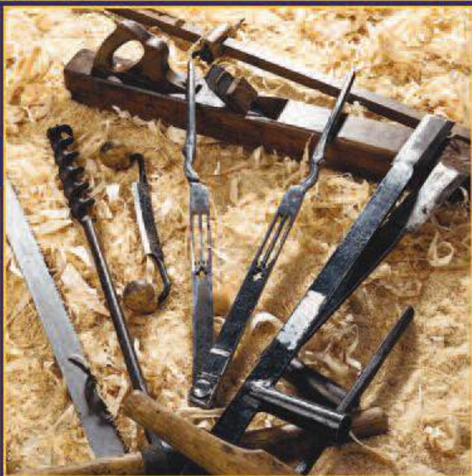
Il a sans doute aussi travaillé à la cathédrale où se trouve sa dalle funéraire dont certaines proportions sont en relation avec le nombre d'or.

De l'Antiquité gréco-romaine à nos jours, techniciens et architectes ont usé du compas largement et avec un rare bonheur.

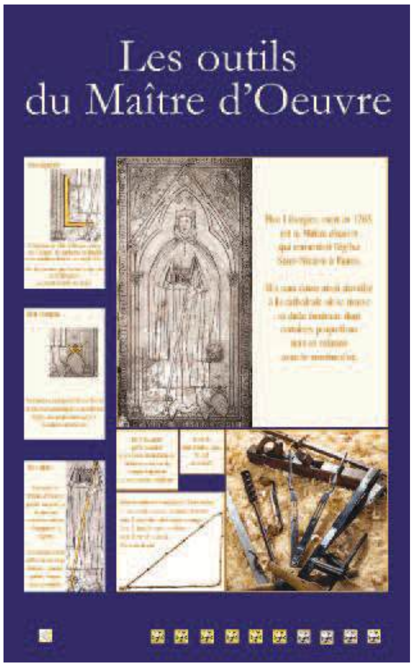
la corde trait d'union entre le ciel et la terre.

Avec la corde à 13 noeuds et 12 intervalles d' une coudée chacun, le maître d'oeuvre trace l'angle droit du triangle rectangle 3, 4, 5, donc le carré, symbole de la Terre et le cercle, Symbole du ciel





Panneau 6

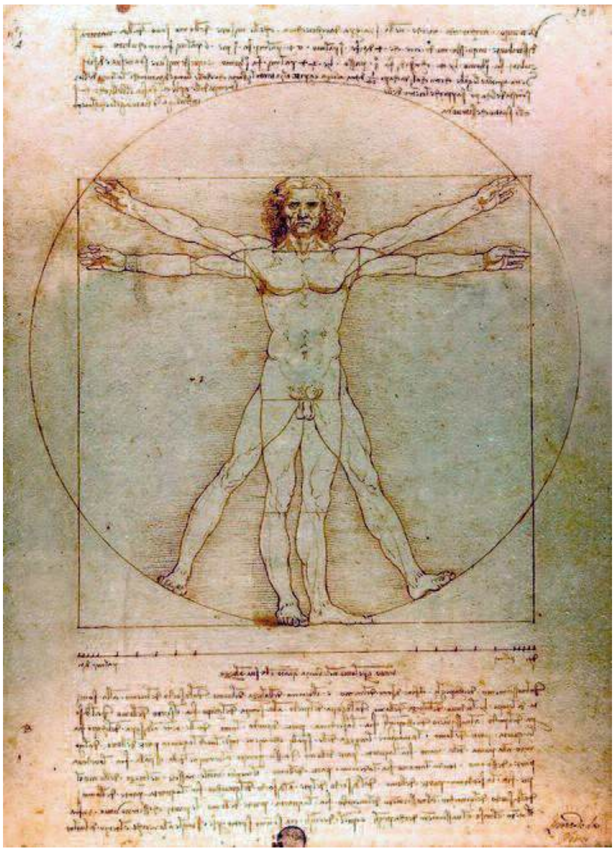


Le corps humain et le nombre d'or

Dessiné par Léonard de Vinci en 1496
***l'homme de Vitruve* place l'homme au centre de la création. Ci-dessous une traduction tirée de ses carnets d'architecte sur les proportions du corps humain**

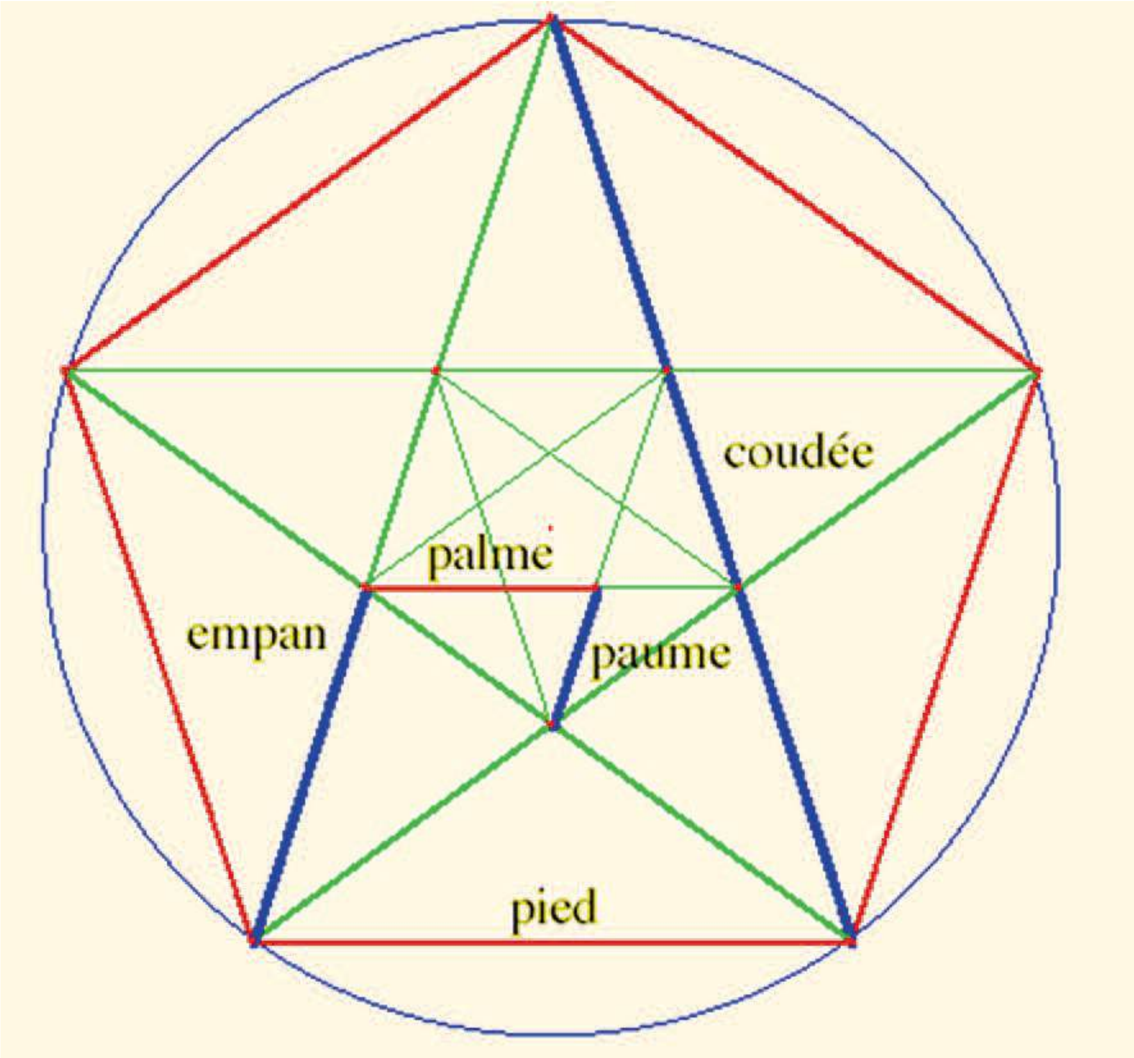
« […] que la Nature a distribué les mesures du corps humain comme ceci.

Quatre doigts font une paume, et quatre paumes font un pied, six paumes font un coude : quatre coudes font la hauteur d'un homme. Et quatre coudes font un double pas, et vingt-quatre paumes font un homme ; et il a utilisé ces mesures dans ses constructions.
Si vous ouvrez les jambes de façon à abaisser votre hauteur d'un quatorzième, et si vous étendez vos bras de façon que le bout de vos doigts soit au niveau du sommet de votre tête, vous devez savoir que le centre de vos membres étendus sera au nombril, et que l'espace entre vos jambes sera un triangle équilatéral.
La longueur des bras étendus d'un homme est égale à sa hauteur.
Depuis la racine des cheveux jusqu'au bas du menton, il y a un dixième de la hauteur d'un homme. Depuis le bas du menton jusqu'au sommet de la tête, un huitième. Depuis le haut de la poitrine jusqu'au sommet de la tête, un sixième ; depuis le haut de la poitrine jusqu'à la racine de cheveux, un septième.



Depuis les tétons jusqu'au sommet de la tête, un quart de la hauteur de l'homme. La plus grande largeur des épaules est contenue dans le quart d'un homme. Depuis le coude jusqu'au bout de la main, un quart. Depuis le coude jusqu'à l'aisselle, un huitième. La main complète est un dixième de l'homme. Le début des parties génitales est au milieu. Le pied est un septième de l'homme. Depuis la plante du pied jusqu'en dessous du genou, un quart de l'homme. Depuis sous le genou jusqu'au début des parties génitales, un quart de l'homme.
La distance du bas du menton au nez, et des racines des cheveux aux sourcils est la même, ainsi que l'oreille : un tiers du visage. »

©wilkipédia



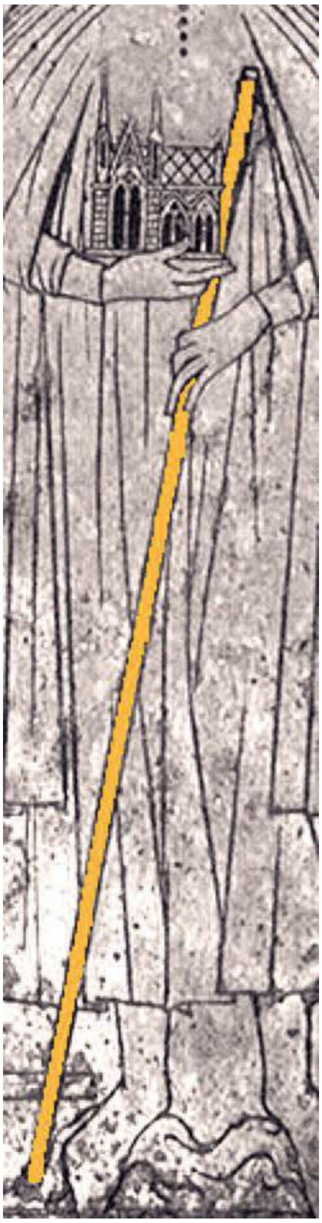
Le Modulor

Le Modulor est une notion architecturale inventée par Le Corbusier en 1945. Silhouette humaine standardisée servant à concevoir la structure et la taille des unités d'habitation dessinées par l'architecte, comme la Cité radieuse de Marseille, la Maison Radieuse de Rezé ou l'Unité d'habitation de Firminy-Vert. Elle devait permettre, selon lui, un confort maximal dans les relations entre l'homme et son espace vital.

Les outils du Maître d'oeuvre

Hue Libergier, mort en 1263,

est le Maître d'œuvre qui construisit l'église Saint-Nicaise de Reims .
Sur sa tombe sont gravés les principaux outils du Maître d'oeuvre

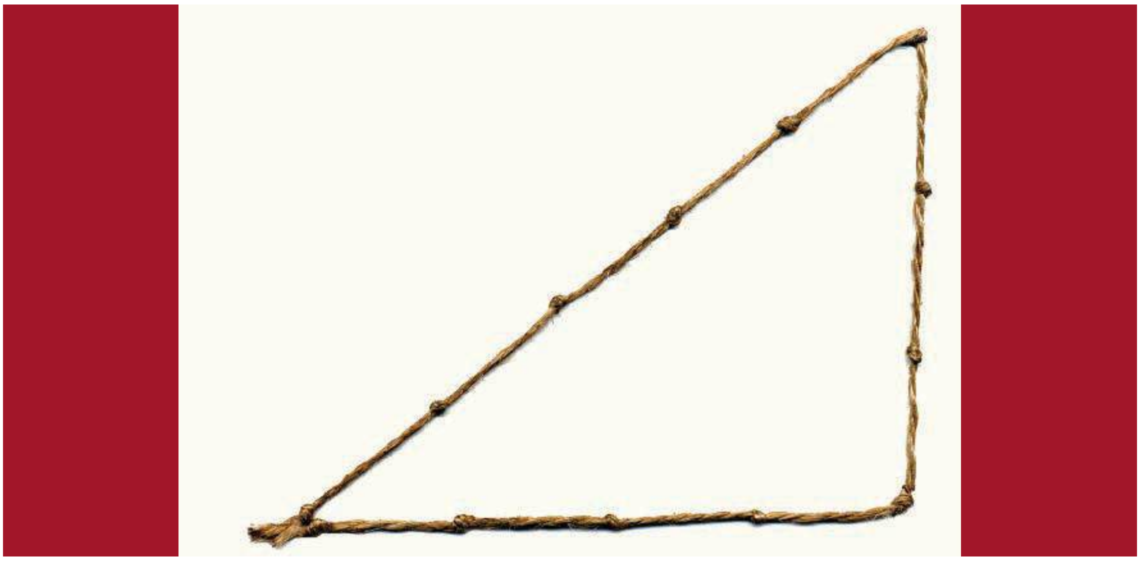


La canne du Maître d'oeuvre

L'équerre

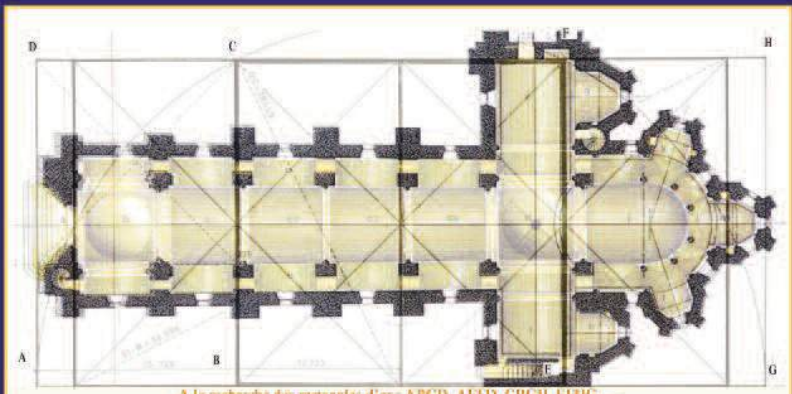
Le compas

La corde à treize noeuds

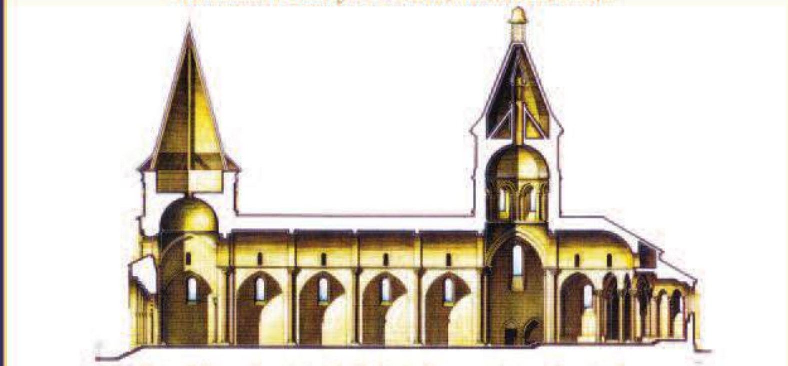


L'Art Roman

Vézelay, Narthex de La Madeleine au solstice d'été
photo Gérald ... www.un-certain-regard.com



A la recherche des rectangles d'or : ABCD, AEFD, CBGH, EFHG, ...



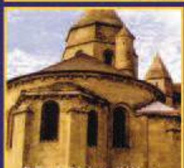
Bénévent l'Abbaye, en Creuse, dessins de Paul Boulhier aimablement communiqués par le Docteur Jean Compost

"Il est permis d'imaginer
le Maître d'Oeuvre sur l'esplanade
choisie, occupé à fixer l'orientation
par l'ombre du gnomon à midi,
à disposer la croix des axes, ...

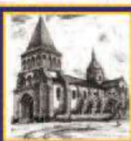
Le choeur de l'église est le centre
du "templum" constitué par le carré
du transept, ...

Ainsi à partir d'un centre unique,
l'église se développe en une belle
unité, à l'aide de mesures et de
rapports assez surprenants pour
notre époque, mais faciles à
arpenter par des procédés simples,
lorsqu'on en connaît le secret."

G. Mourlevat



Eglise de Bénévent l'Abbaye

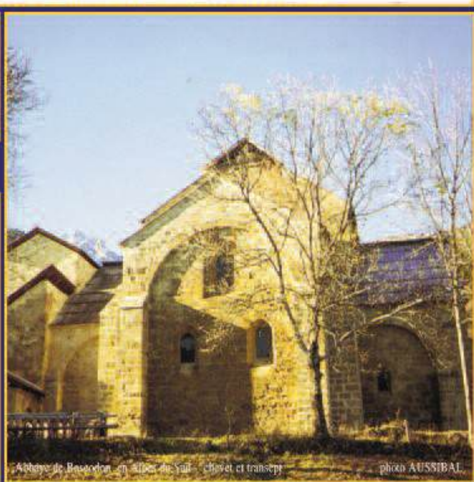


Abbaye de Boscodon - intérieur
photo La Goélette

"Il dépend de celui qui passe
que je sois tombe ou trésor,
que je parle ou me taise.

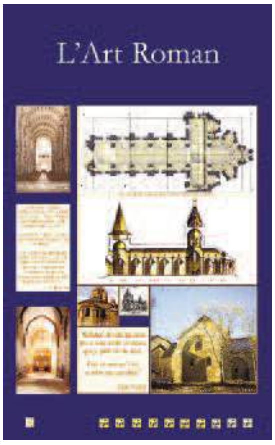
Ceci ne tient qu'à toi,
n'entre pas sans désir"

Paul Valéry



Abbaye de Boscodon, en Alpes du Sud - chevet et transept
photo AUSSIBAL

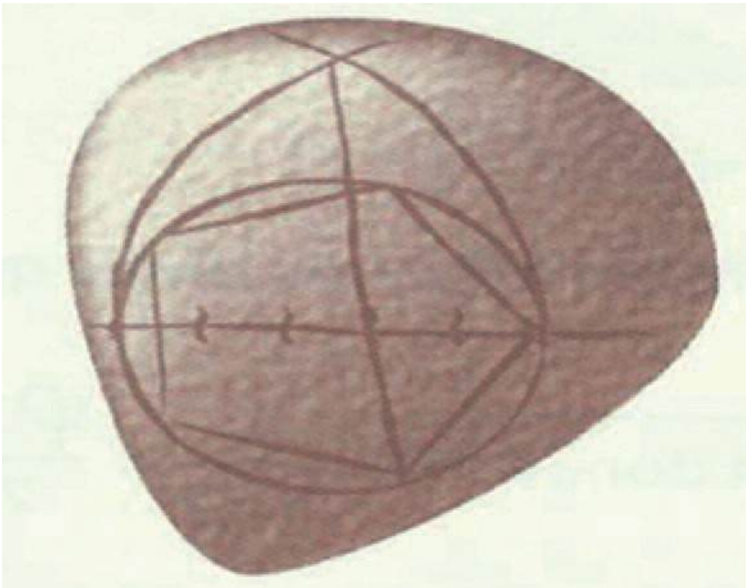
Panneau 7



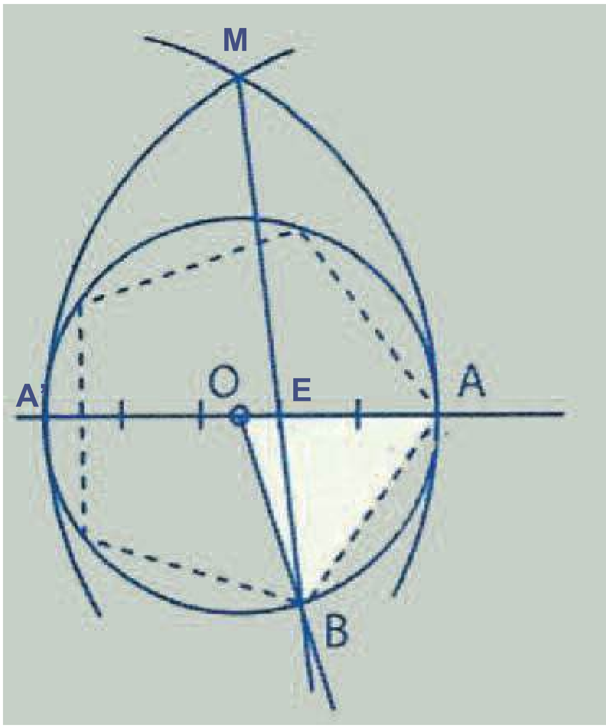
Voici deux constructions de maitre d'œuvre prises dans le livre Histoires de Géomètres et Géométrie aux éditions Le Pommier.

Une construction approchée du pentagone

le pentagone du bijoutier



Dans cette construction on trouve :



$\widehat{AOB} = 71°,95$ au lieu de 72°
soit une erreur de 0,05°.

Démonstration : A'MA est un triangle équilatéral EA = ⅖ (A'A).
On pose OA = 1; on calcule par Pythagore
$OM = \sqrt{3}$ et $ME = 2\,\dfrac{\sqrt{19}}{5}$

$\sin \widehat{OME} = \dfrac{OE}{ME} = \dfrac{\sqrt{19}}{38}$

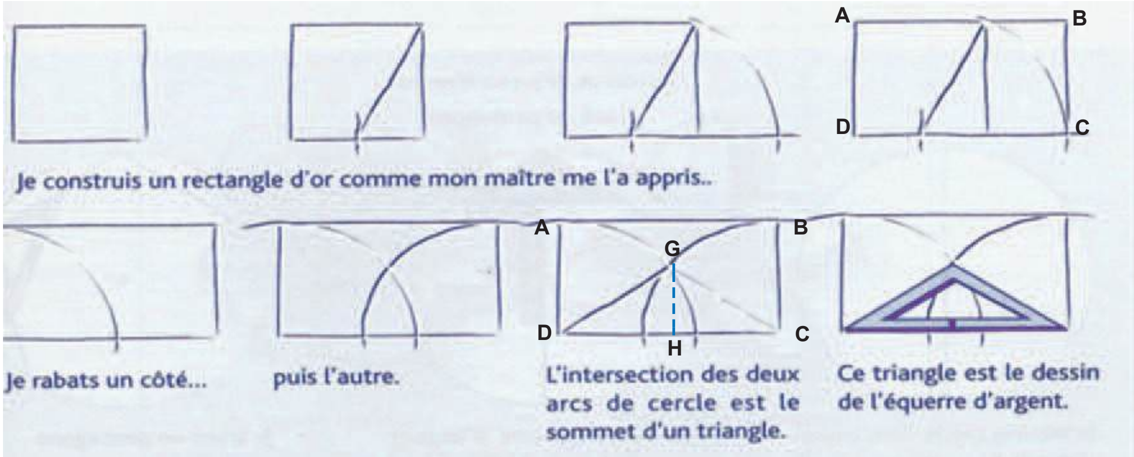
et dans le triangle OMB :

$\dfrac{\sin \widehat{OBE}}{OM} = \dfrac{\sin \widehat{OME}}{OB}$

On trouve $\sin \widehat{OBE} = \dfrac{\sqrt{57}}{38}$

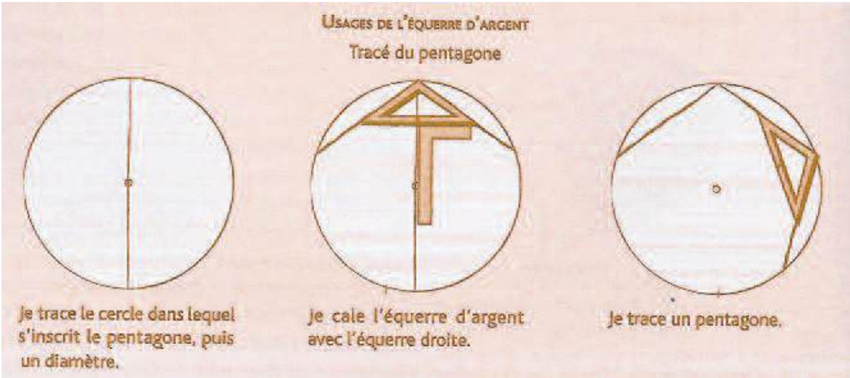
On déduit $\widehat{AOB} = 71°,95$

Construction de l'équerre d'argent.

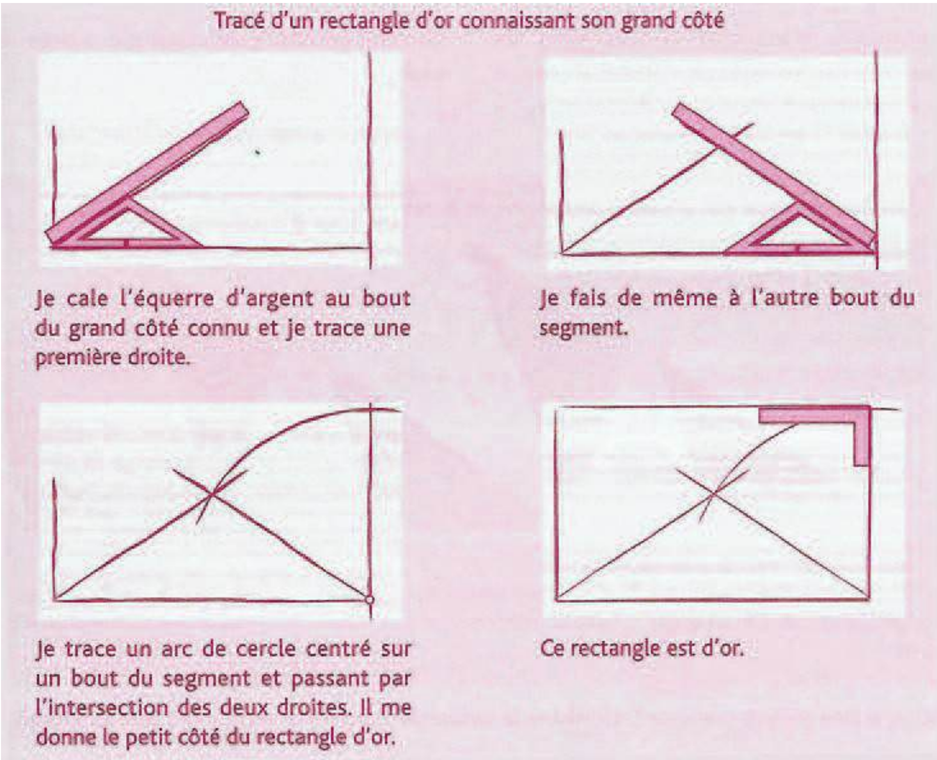


On montre que sin $\widehat{DGH}$ = DH/DG et DH = ½ DC et DG=DA
donc sin $\widehat{DGH}$ = ½ Φ et $\widehat{DGH}$ = 54°, donc $\widehat{DGC}$ = 108°

Avec l'équerre d'argent, construction du pentagone régulier.

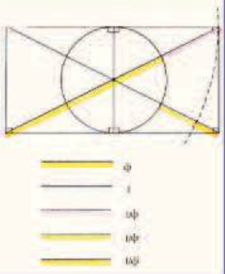


Avec l'équerre d'argent, construction du rectangle d'or.

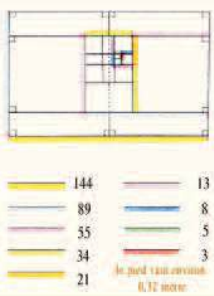


Soleil, nombre d'or
Thoiry-en-Yvelines

LA SECTION D'OR DANS LE RECTANGLE "DOUBLE CARRE"



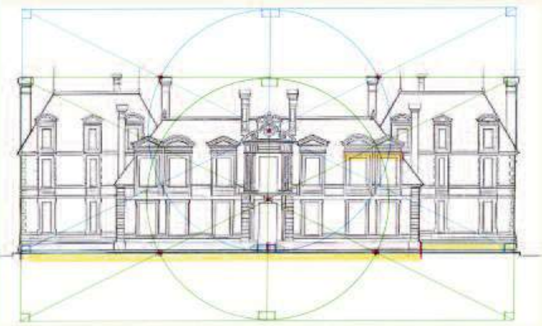
MESURES ARCHITECTURALES EN PIEDS



Les deux croquis d'architecture représentent la façade sud-ouest du château dans son état d'origine, sauf la pendule qui était un oculus.

Le bas des fenêtres fut abaissé par la suite, et deux pavillons à la Mansart vinrent s'ajouter de part et d'autre du corps central.

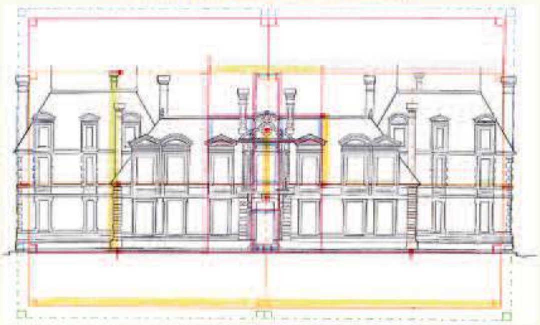
UN CHÂTEAU ENTRE TERRE ET CIEL



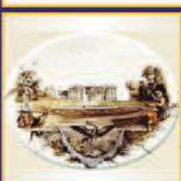
Notez les coïncidences architecturales avec les tracés qui font apparaître des longueurs dans le rapport

Précisons d'autre part que la longueur de l'édifice fait 150 pieds et que la hauteur des ailes fait 50 pieds, soit juste le tiers.

DES RECTANGLES D'OR EN FILIGRANE



Un grand rectangle d'or calé entre les deux cheminées externes, donc intra muros, permet une décomposition "confidentielle" de la façade en rectangles d'or et carrés secondaires. Notez le symbole religieux qui apparait, témoignant sans doute de la foi du commanditaire du château, Raoul Moreau, Trésorier de l'Epargne d'Henri II à Henri IV.



Gravure ancienne symbolisant le " bien-vivre " et le " bien-être " chers à Philibert de l'Orne.

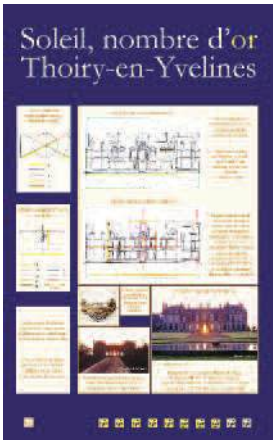
Un habile décalage des fenêtres des deux façades produit un remarquable effet de transparence lors du solstice d'hiver.

UN CADRAN SOLAIRE MONUMENTAL

(Lever du soleil lors du solstice d'été)

Réalisé en 1564 par l'architecte Philibert de l'Orne, le château de Thoiry a été orienté avec précision pour qu'à chaque solstice le soleil semble se lever, le 21 juin ou se coucher, le 22 décembre dans le vestibule central.

Panneau 8



Le château de Thoiry en Yvelines

De nombreuses civilisations ont construit leurs monuments pour être de vrais observatoires du mouvement du soleil ou de la lune.
On pense bien sur aux Pyramides des Indiens d'Amériques.
Voici Chichen Itza au Mexique.

Le château de Thoiry

Nous avons choisi de vous parler du **château de Thoiry** en Yvelines et de l'un de ses architectes **Philibert de l'Orme** .

Philibert de l'Orme, également connu sous son nom de **Delorme** (né à Lyon, vers 1510 - décédé à Paris, le 8 janvier 1570) est l'un des plus grands architectes français de la Renaissance.
Il naît dans une famille de maître-maçons. De 1533 à 1536, il séjourne à Rome où il étudie les monuments antiques. En Italie, et est attiré à Paris en 1537 par le cardinal Jean du Bellay (ambassadeur de France à Rome), qui le fait connaître à la cour de François Ier et de Henri II.


Autoportrait
de Philibert de l'Orme

L'architecture de Philibert de l'Orme utilise le Nombre d'Or et fait du Château de Thoiry le pivot d'un calendrier solaire qui a l'horizon pour cadran, et met nos sens de l'équilibre en harmonie avec les forces de la nature.

Des décalages dans la symétrie de l'architecture aident le Château à mieux remplir ses fonctions de calendrier et de maison solaires.

Trois ponts, un central et deux latéraux, ont pour arches les fenêtres des pièces du rez-de-chaussée du corps central du château. Ils s'ouvrent sur le ciel et permettent de voir en transparence le lever du soleil au Solstice d'été et à l'Equinoxe de Printemps, et son coucher au Solstice d'Hiver et à l'Equinoxe d'Automne.

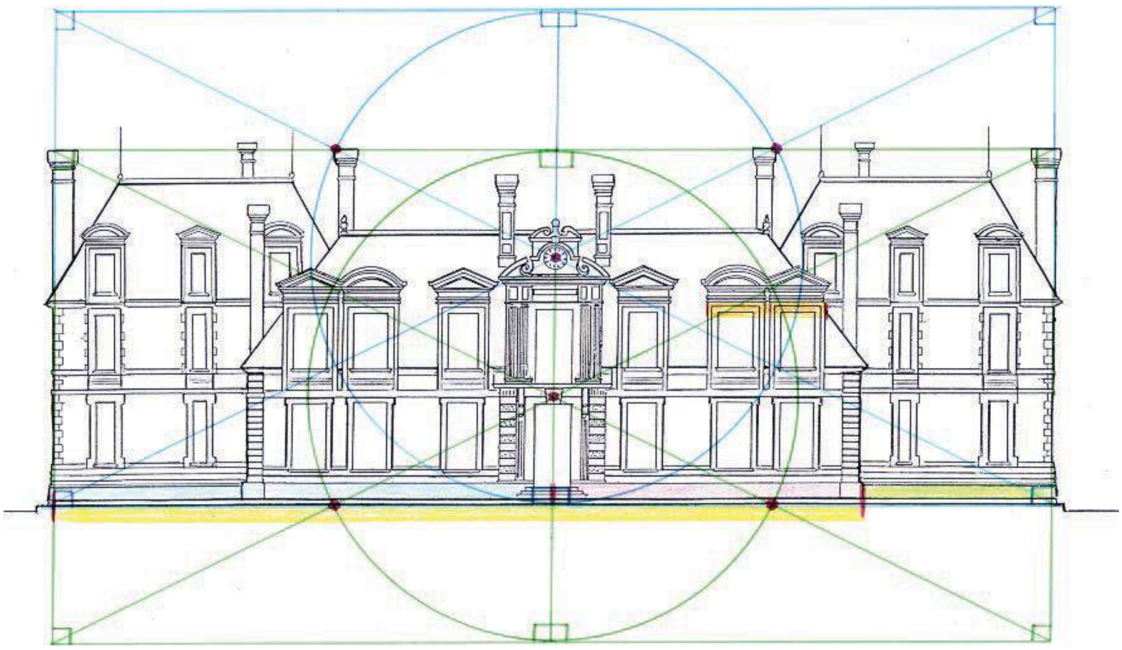
En montant l'allée centrale d'arrivée au château, on est ébloui et accueilli par la lumière du soleil qui traverse les fenêtres du rez-de-chaussée du corps central. Cette transparence fait du premier étage du corps central un pont dont les 5 arches s'ouvrent sur le vide lumineux du ciel. Elle est supérieure, car, quand on fait face à l'arche centrale d'un pont, la transparence des arches latérales diminue en fonction de leur distance du centre. Pour compenser la largeur du château et rendre parfaite la transparence, deux des fenêtres de la façade N.E. ont 2,3 pieds, 0,75 m. Vu du N.E., quand le soleil passe à 11 heures sur la façade S.O., ces 5 arches du rez-de-chaussée sont en contre-jour et l'éclat de la lumière en transparence est amplifié par l'ombre de la cour intérieure.

Lors du solstice d'été, le 21 juin, le soleil se lève dans l'axe central N.E. du château et il se reflète dans le miroir d'eau tel le Dieu Soleil égyptien renaissant chaque matin de l'eau de l'océan primordial.

Lors du solstice d'hiver, le 21 décembre, il se couche dans l'axe S.O. Ainsi, vue de l'extérieur et grâce à la transparence du rez-de-chaussée, on a l'illusion que le soleil se lève ou se couche dans le château.

Vu du vestibule Appolon, le dieu grec qui conduit le char du soleil, descend sur l'horizon la verticale de la statue de sa soeur, la déesse Artémis, pour passer avec elle la plus longue nuit de l'année, et avec les dernières lueurs du jour leurs reflets se mêlent dans l'eau du bassin du parterre S.O..

Les deux autres ponts sont dans les axes verticaux Nord-Sud et Est-Ouest. Quand en faisant le tour du château on passe dans la perspective N.S. ou E.O., l'aile semble n'être attachée au corps central que par l'angle. Les fenêtres les plus extérieures de la façade N.E. du corps central rentrent en transparence avec les fenêtres les plus extérieures de la façade S.O. du corps central, créant un pont de lumière. Les perspectives du jardin prolongent ces axes latéraux jusqu'à l'horizon. Dans l'axe Est on voit en transparence le lever du soleil sur l'horizon à l'équinoxe de printemps et, de l'opposé, son coucher à l'équinoxe d'automne.



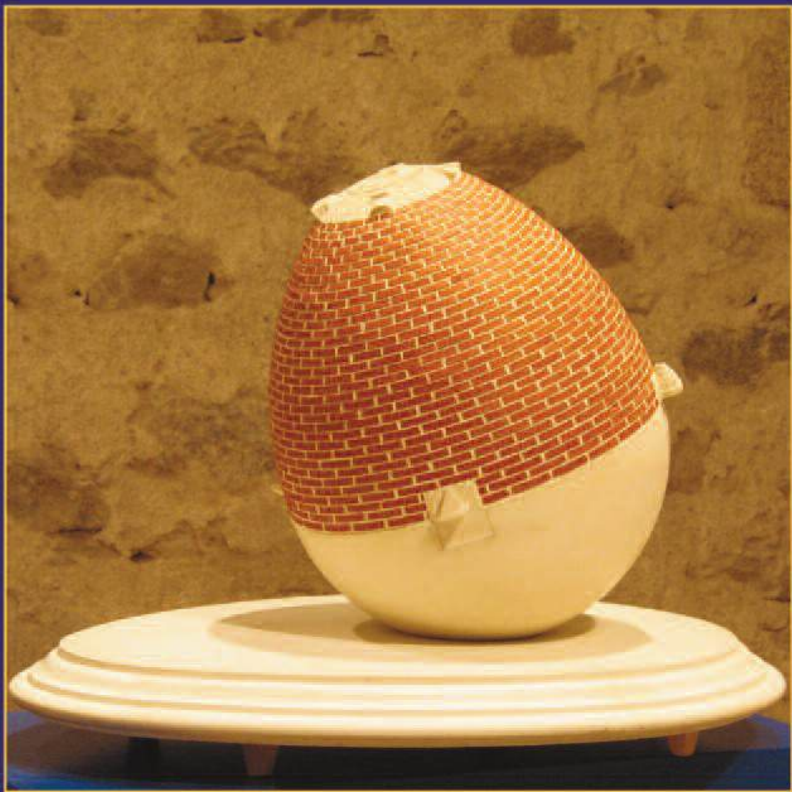
Les compagnons et le nombre d'or

Les Compagnons du Tour de France

Depuis l'antiquité, ils participent à l'expression d'une architecture harmonieuse, dans laquelle le " *nombre d'or* " rythme parfois l'édifice : pyramides d'Egypte, labyrinthes, Tour de Babel, Temple de Salomon, cathédrales, et bien d'autres encore.
De nombreux symboles visibles sur les attributs compagnonniques, cannes, couleurs, chefs d'œuvre, ...rappellent cette appartenance.

L'enseignement

donné aux Compagnons, leur permet de se construire en harmonie avec eux-mêmes. Les cinq points fondamentaux représentent les fondations indispensables à l'élévation de leur temple intérieur.

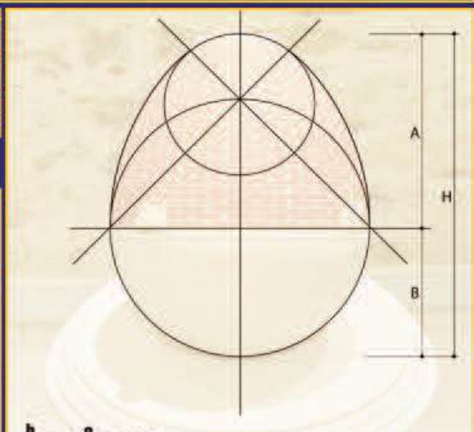


OVOÏDE SUR SOCLE.

Béton blanc, briquettes en terre cuite et calcaire tendre.
Beaucoup de symboles sont inscrits sur ce sujet original : sa forme, les sculptures de la clé de voûte et l'hirondelle placée à l'intérieur.

" L'œuf est le symbole de la vie en puissance, il renferme les germes de ce qui peut être créé ".

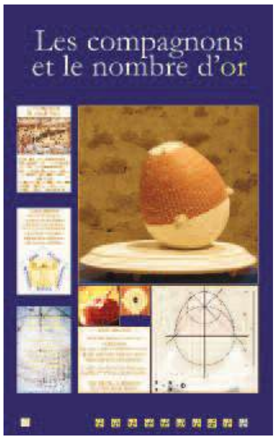
CHEF-D'ŒUVRE DE RÉCEPTION D'UN COMPAGNON MAÇON.



$$\frac{h}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$$

Panneau 9

Les compagnons :
Un apprentissage qui valorise le travail de la main …



Succèdant, au Moyen-Âge, aux différentes coorporations d'ouvriers, le compagnonnage a une histoire parfois difficile au fil des siècles, des chantiers et de l'Industrialisation. Les valeurs exemplaires, dont il est toujours porteur, a incité l'Unesco à inscrire ce mouvement en 2010 sur la Liste représentative du patrimoine culturel immatériel de l'humanité au titre :
Le compagnonnage, réseau de transmission des savoirs et des identités par le métier.

Le système français du compagnonnage est un moyen unique de transmettre des savoirs et savoir-faire liés aux métiers de la pierre, du bois, du métal, du cuir et des textiles ainsi qu'aux métiers de bouche. Son originalité tient à la synthèse de méthodes et procédés de transmission des savoirs extrêmement variés : itinérance éducative à l'échelle nationale (période dite du « Tour de France ») voire internationale, rituels d'initiation, enseignement scolaire, apprentissage coutumier et technique. Le mouvement du compagnonnage concerne près de 45 000 personnes qui appartiennent à l'un des trois groupes de compagnons. Les jeunes à partir de 16 ans qui veulent apprendre et/ou développer leurs compétences dans un métier donné peuvent demander à rejoindre une communauté de compagnons. La formation dure en moyenne cinq ans pendant lesquels l'apprenti change régulièrement de ville, en France et à l'étranger, pour découvrir divers types de savoirs et diverses méthodes de transmission de ces savoirs. Pour pouvoir transmettre son savoir, l'apprenti doit produire un « chef-d'œuvre » qui est examiné et évalué par les compagnons. Le compagnonnage est généralement perçu comme étant le dernier mouvement à pratiquer et enseigner certaines techniques professionnelles anciennes, à assurer une formation à l'excellence dans le métier, à lier étroitement développement de l'individu et apprentissage du métier et à pratiquer des rites d'initiation propres au métier.

Le compagnonnage, générateur d'excellence chez ses membres, est pratiqué par de nombreux métiers : Boulanger, Carrossier constructeur, Charpentier / constructeur bois, Chaudronnier, Cordonnier / bottier, Couvreur, Ébéniste, Électricien, Forgeron, Jardinier-paysagiste, Maçon, Maréchal-ferrant, Maroquinier, Mécanicien, Mécanicien de précision, Menuisier, Pâtissier, Peintre, Plâtrier / Staffeur / Stucateur, Plombier, Sellier, Métallier Serrurier, Tailleur de pierre, Tapissier / Tapisserie d'ameublement / Tapissier garnisseur.

Certains de ces métiers, utilisent toujours la proportion du nombre d'or dans leur travail.

Détail d'un chef-d'oeuvre de compagnon charpentier.

Musée départemental du compagnonnage, Pierre-François Guillon. Saône-et-Loire

Polyèdre étoilé

Réalisation François Dejeumont

A la recherche du nombre d'or

Le mariage de la Vierge - Raphaël

Le Modulor du Corbusier

« C'est un outil de travail,
un outil précis,
un clavier,
un piano,
un piano accordé . »

Corbusier (1887 - 1965)

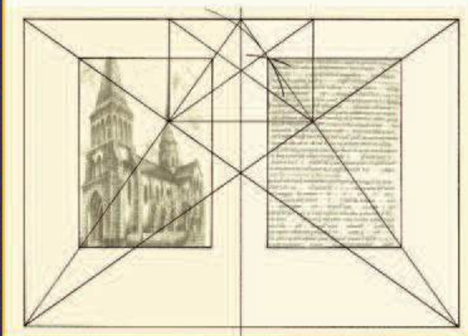
Violon que j'ai fabriqué pour
Yehudi Menuhin

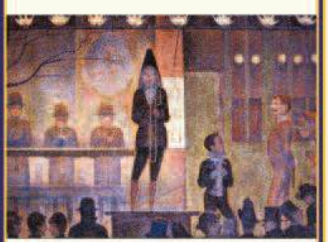
Alain Carbonare
Maître Luthier

*"Si ce n'était pour admirer
la beauté de l'harmonie,
la science ne serait pas
digne d'intérêt "*

Henri Poincaré

En calligraphie, tracé permettant d'obtenir un rapport entre les surfaces de la page et du texte égal à Φ^2





Seurat -

EXPOSITION CIJM
réalisée sous la direction de
Marie José Pestel
et l'assistance de
Patrick Arrivetz

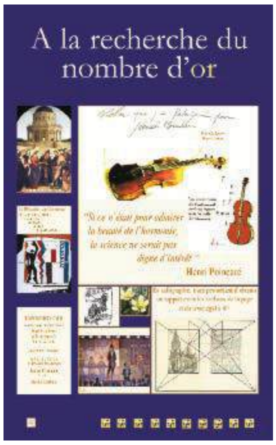
en collaboration avec

la Cité des Métiers
et des Arts de Limoges

Laurent Pflughaupt
Calligraphe

Mireille Hartmann

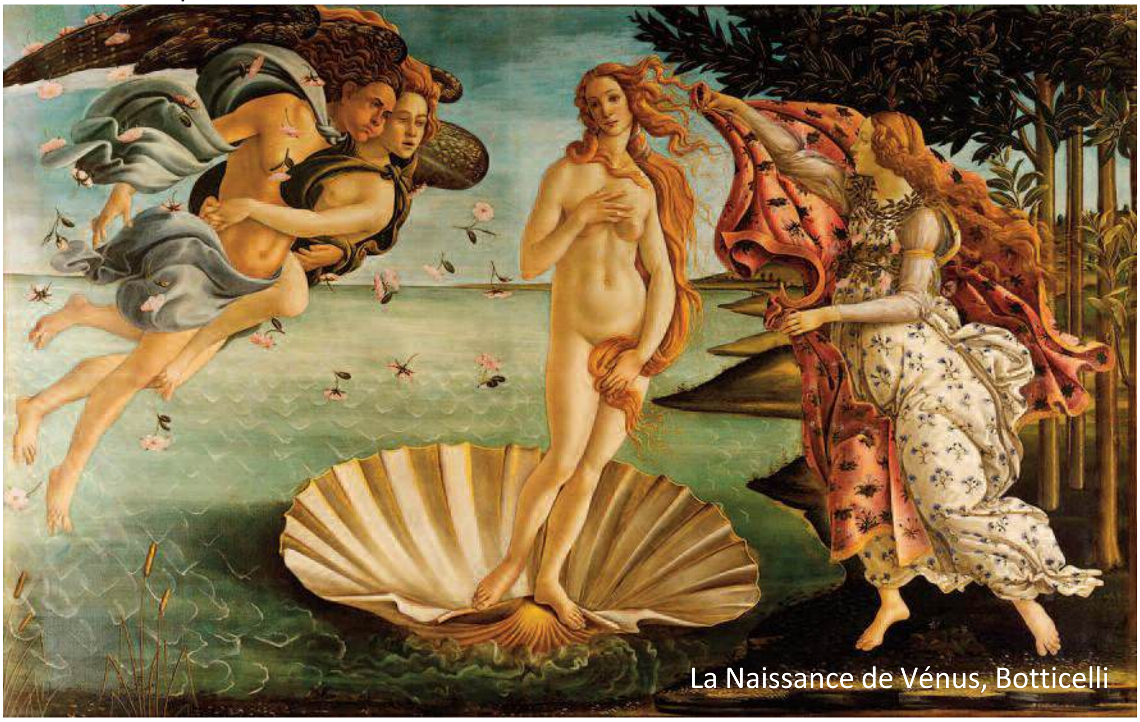
Panneau 10



Le nombre d'or dans l'art

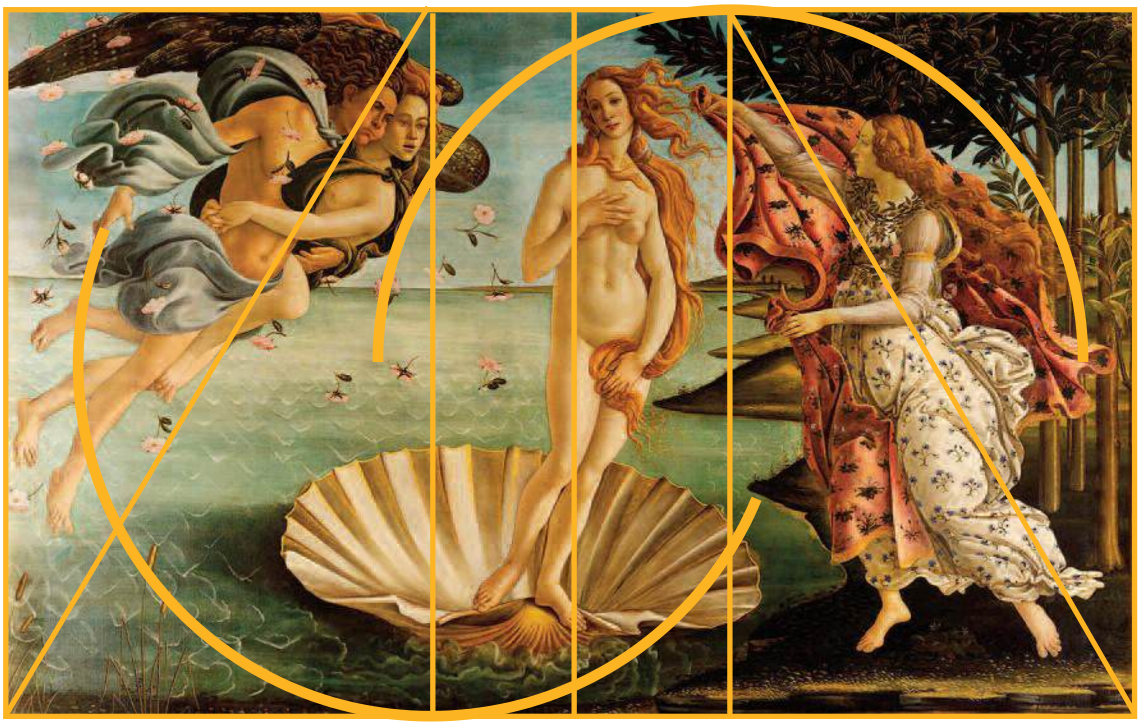
Le premier exemple est un tableau de Jicopo de Barbari. Il représente le mathématicien Fra Luca Pacioli (qui a écrit en 1498 un traité sur le nombre d'or : De Divina Proportione) expliquant un théorème à un élève. On constate que le pouce et l'index de sa main gauche partagent la hauteur du livre selon ϕ.

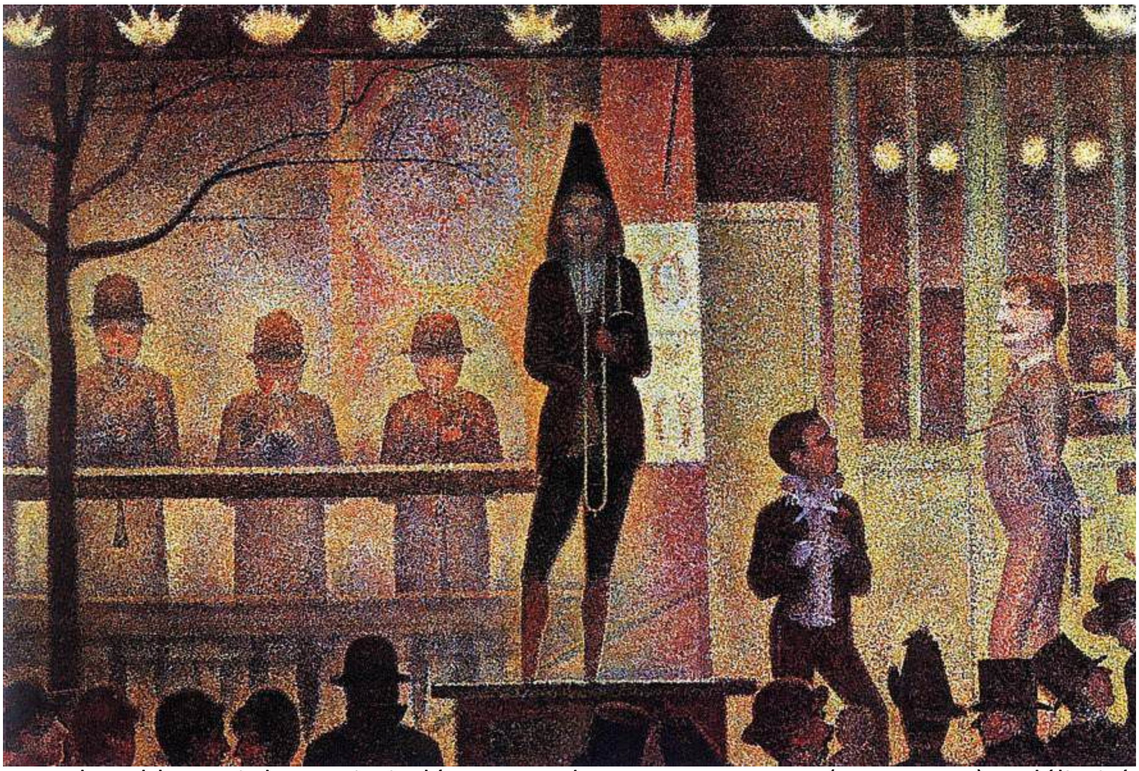
Cette célèbre toile fut commandée par Giovanni di Pier Francesco de Médicis. Le sujet est tiré de la littérature grecque et romaine, et en particulier de l'écrivain romain Ovide dont les métamorphoses connaissent un grand succès du XIVe au XVIIe siècle. Botticelli représente la déesse du Temps recouvrant d'un manteau Vénus, déesse romaine de l'amour et de la beauté, née de l'écume de la mer d'après la mythologie. Sur la gauche se trouvent les dieux du vent dont Zéphyr, qui ont transporté la belle jusqu'au rivage. On pense généralement que le peintre a voulu représenter la naissance de l'humanité. Ses tableaux évoquent souvent un monde idéal.



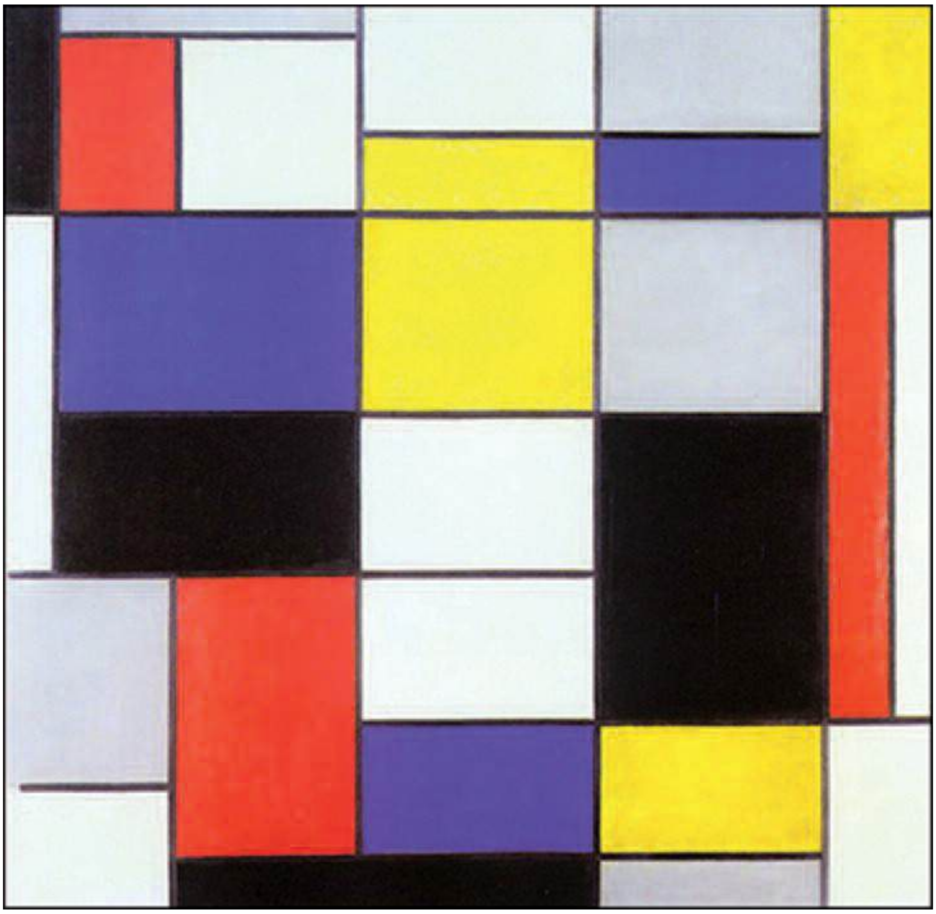
La Naissance de Vénus, Botticelli

Le format du tableau correspond à un rectangle d'or. Le groupe des Vents, à gauche du tableau, le personnage de la Grâce à droite, s'inscrivent dans des rectangles d'or et plus précisément le long des diagonales de ces rectangles d'or. Il est possible également de tracer deux cercles dont le diamètre correspond au côté de ces rectangles d'or. Le cercle de gauche renferme le groupe des Vents et Vénus, le cercle de droite Vénus et le personnage de la Grâce. Le Nombre d'Or apporte donc une clef à la composition de ce tableau.





Dans le tableau ci-dessus intitulé *La Parade,* Georges Seurat (1859-1891) a délimité les rectangles d'or par des changements de tons. Les motifs supérieurs permettent à la toile.de respecter le nombre d'or.



A la recherche du rectangle d'or avec votre compas de proportion dans ce tableau de Mondrian.

Piet Mondrian est né en 1872, en Hollande. Il s'installe pour quelques années en 1912 à Paris. Il fréquenta Picasso. Il est mort en 1944 à New York.